INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL II

Modelos Analíticos de Stocks

1ª Parte - Modelos Determinísticos

Manuel Ramalhete
2018

Nota. Esta apresentação é baseada nas aulas ministradas pelo autor na disciplina de Investigação Operacional II (IO II), do curso de Matemática Aplicada à Economia e à Gestão (MAEG). No entanto, alguns aspectos constantes deste texto, nomeadamente alguns desenvolvimentos adicionais, não são apresentados nas aulas da disciplina e podem ser retirados sem qualquer perda de generalidade.

Manuel Ramalhete

INDICE

INDICE

1. Introdução

1.1 Natureza dos sistemas de stocks

Sob o ponto de vista financeiro e contabilístico, os stocks, ou existências, são uma aplicação de fundos, tendo por isso um custo de oportunidade associado à sua existência, correspondentes ao custo dos fundos que os financiam. Como aplicação são um activo da organização que detém a sua posse. Em geral o seu funcionamento acarreta outros custos de manutenção.

Objectivo da existência de stocks**: Armazenar bens tendo em vista a satisfação da procura futura.**

Razões da existência de stocks**:**

- **Impossibilidade, ou não economicidade, de receber produtos no momento em que são procurados;**
- **Sazonalidade da produção ou da procura de certos produtos;**
- **Variabilidade dos preços de certos produtos.**

GESTÃO DE STOCKS: Determinação da política óptima de aprovisionamento a fim de satisfazer a procura futura.

POLÍTICA: Conjunto de regras que permitem saber QUANTO e QUANDO se deve aprovisionar.

Nota 1. Não serão abordados os problemas de gestão de stocks em que não se controla o aprovisionamento (barragens, por exemplo, em que se procura gerir o stock de água).

Nota 2. Supõe-se que a procura futura é independente da política adoptada.

Nota 3. A Formulação da Política de Gestão de Stocks será feita por recurso a modelos matemáticos de optimização.

1.2 Características dos sistemas de stocks

1. **Decisão (Encomenda)**

    - Única
    - Sequencial (repetitiva)

2. **Aprovisionamento (Fonte)**

    - Externo
    - Interno

3. **Procura (Conhecimento)**

    - Constante
    - Variável
    - Dependente
    - Independente
    - Certa (determinística)
    - Aleatória
    - Incerta (sem conhecimento do comportamento probabilístico)

4. **Prazo de Reaprovisionamento**

    - Constante
    - Variável
    - Determinístico
    - Aleatório
    - Incerto

1.3 Sistemas Operacionais de Stocks

- Encomenda Única
- Ponto de Encomenda ou Revisão Contínua (sequencial)
- Calendário ou Revisão Periódica (sequencial)
- MRP (Material Requirement Planning)
- DRP (Distribution Requirement, ou Resource Planning)

1.4 Parâmetros e variáveis nos Modelos de Sistemas de Stocks

Custos de Aquisisição: Custos a pagar ao fornecedor, ou custos de produção, no caso de fornecedor interno (unidade de produção dentro da organização), custos de transporte, no caso de serem proporcionais às quantidades, a partir de um custo unitário, seguros, quando no mesmo caso, custo de recepção e inspecção, quando estabelecidos por unidade, eventuais perdas e quebras, etc. Em geral, estão todos os custos, variáveis com a quantidade, até fazer chegar o produto ao armazém de venda, ou de utilização posterior. O custo unitário será designado por $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q})$.

Custos de Encomenda ou de Lançamento: Inclui todos os custos e despesas ligadas à aquisição mas independentes da quantidade encomendada, que existem associados á encomenda, mas de natureza fixa (em relação à quantidade). Estão neste casos despesas administrativas com a encomenda, custos de transporte, quando fixos (aluguer de um meio de transporte para transportar a encomenda), custos fixos de inspeção e recepção, certo tipo de seguros, etc.. Serão designadas por $\boldsymbol{A}$.

Custos de Posse de Stock: São custos associados à existência do stock, em função do seu montante (maior o stock maior o custo) e do tempo de permanência em armazém. Desde logo os custos financeiros correspondentes ao capital imobilizado em stock (custos de oportunidade do capital), perdas de valor devido à permanência em armazém, eventuais quebras, eventuais roubos, seguros, aluguer de armazém, quando for proporcional ao montante em stock e ao tempo de permanência, etc.

Assume-se que o custo de uma unidade física em stock durante um período, aqui suposto um ano, é igual a $\boldsymbol{h}$. Sendo $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{C}$ o custo unitário do produto (quando entra em armazém), se definirmos $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{IC}$, resulta que I é o custo de uma unidade monetária em stock durante um ano. $\boldsymbol{I}$ é designado por **taxa de posse** e $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{IC}$ por custo unitário de posse. A principal razão que leva a definir $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{IC}$ resulta do facto de uma parcela importante do custo de stock, $\boldsymbol{h}$, representar o custo de imobilização de imobilização financeira e este ser função (proporcional) ao valor unitário, $\boldsymbol{C}$, do produto.

Custos de ruptura por venda diferida: são custos associados a rupturas de stocks, neste caso, por venda diferida, ou seja, o cliente vê a sua procura satisfeita mais tarde, havendo para a entidade vendedora um custo, por unidade em falta ou simplesmente por haver falta, independentemente da dimensão. Em certos casos este custo pode ser calculado objectivamente, como seja no caso de existirem penalidades estabelecidas contractualmente, indemnizações, etc., mas noutros são definidos subjectivamente, correspondentes a perdas por degradação de imagem, que se traduzem em perdas a prazo. De um modo geral, e salvo indicação em contrário, assume-se que o custo unitário de ruptura é dado pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{f}}+\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{t},$$

em que $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{f}}$ é o custo fixo de ruptura, independente da duração da ruptura, e $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{v}}$ o custo variável unitário de ruptura. Se uma unidade for diferida durante um ano, o custo de ruptura dessa unidade será então $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{f}}+\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{v}}$. Muitas vezes, nos modelos determinísticos, assume-se que $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{f}}=\mathbf{0}$. Pode acontecer existir apenas um custo $\boldsymbol{p}$ independentemente do número de unidades em ruptura e da duração da ruptura.

Custos de ruptura por venda perdida: são custos associados a rupturas de stocks, neste caso por venda perdida, ou seja, o cliente, pelo facto de o produto não estar disponível, não o compra, podendo satisfazer a procura junto de outra entidade concorrente. Para a entidade vendedora haverá um custo de oportunidade, correspondente ao benefício não realizado por não vender o produto, e podendo ainda haver um custo de ruptura (uma penalidade, por exemplo), em sentido estrito, por unidade em falta, ou independentemente do número de unidades em falta. Em certos casos este custo pode ser calculado objectivamente, como seja no caso de existirem penalidades estabelecidas contractualmente, indemnizações, etc., mas noutros são definidos subjectivamente correspondentes a perdas por degradação de imagem, que se traduzem em perdas a prazo. De um modo geral assume-se que o custo unitário de ruptura por venda perdida é dado pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{\mathbf{0}}+\boldsymbol{p}_{\mathbf{1}},$$

sendo p_0 o custo de ruptura em sentido estrito e p_1 o benefício não realizado.

Procura. Considera-se que a procura por unidade de tempo é conhecida. Quando a procura é constante por unidade tempo, em geral o ano, designa-se por D. Caso seja variável por unidade de tempo especifica-se o período, indicando $D_1, D_2, \dots, D_n$, para os períodos $1, 2, \dots, n$, respectivamente. Salvo indicação em contrário, D designa a procura anual.

Prazo de Reaprovisionamento: tempo que decorre desde o momento em que uma encomenda é desencadeada (passada) até ao momento em que é recebida e o produto se torna disponível. Designa-se por L **(**do inglês *lead time***).**

Comprimento do Ciclo: tempo que demora a vender o stock correspondente a uma encomenda. É, deste modo, o tempo que decorre entre duas encomendas consecutivas, entre duas encomendas recebidas ou entre duas encomendas passadas. Designa-se por T.

Quantidade Económica da Encomenda (QEE**).** É a quantidade que minimiza o custo total por unidade de tempo. Salvo indicação em contrário, o período considerado é o ano e a QEE é a quantidade que resulta da minimização do custo médio anual. Quando a procura é variável e a quantidade óptima a encomendar não é constante, define-se uma QEE por período, sendo $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_n^*$, a quantidade a encomendar, respectivamente, nos períodos $1, 2, \dots, n$.

Ponto de Encomenda. É o momento, medido em geral pelo nível do stock, em que deve ser efectuada (lançada) uma encomenda. Designa-se por r (do inglês *reorder point).*

Nivel de ruptura. Consiste no montante máximo de unidades em ruptura por ciclo. Salvo indicação em contrário, designa-se por S**.**

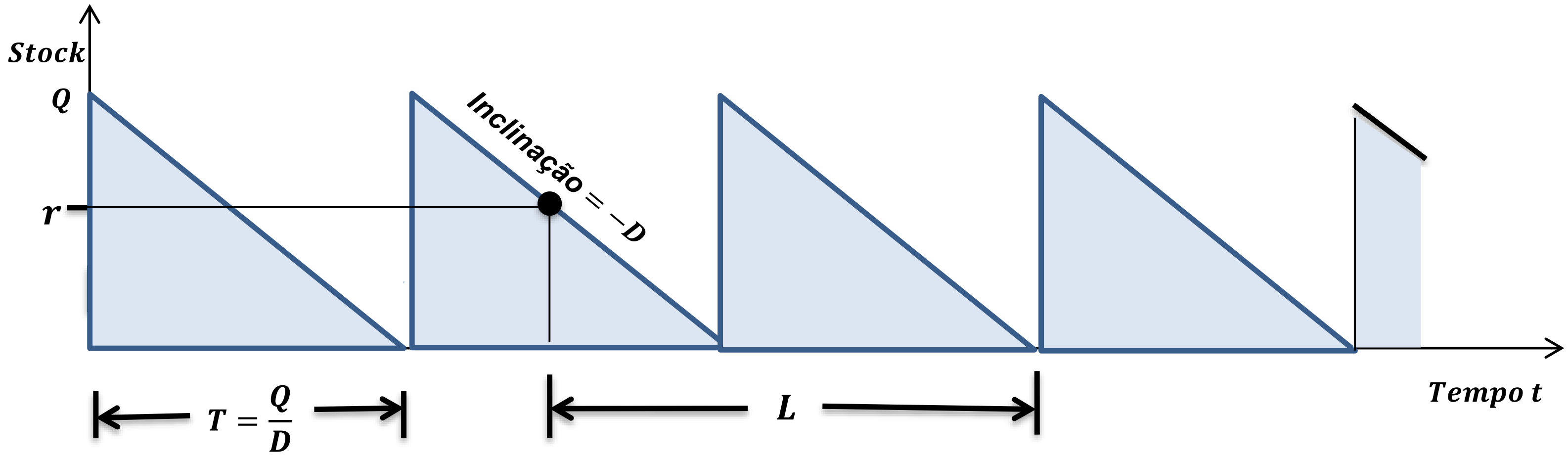
O conhecimento do ponto de encomenda, juntamente com o da quantidade económica da encomenda, ou com o nível a que se pretende levar o stock, e do nível de ruptura, nos casos em que esta está contemplada, determina a política de stocks.

2. Modelo de Wilson ou Modelo da QEE

Hipóteses:

- Procura constante e uniforme no tempo, dada anualmente por $\boldsymbol{D}$**;**
- Custo unitário do produto constante, $\boldsymbol{C}$;
- Prazo de reaprovisionamento constante, $\boldsymbol{L}$, e maior do que zero;
- Não existência de ruptura de stock.
- Abastecimento instantâneo (fornecedor externo)

Representação gráfica do stock (curva em dentes de serra):



Custos de Aquisição

- No ciclo**:** $\boldsymbol{CQ}$
- No ano: $\boldsymbol{CQ\frac{1}{T} = CQ\frac{D}{Q} = CD}$ $\left(\boldsymbol{\frac{1}{T} = \frac{D}{Q}}\right.$= nº de ciclos/encomendas em média por ano)

Custos de Encomenda

- No ciclo**:** $\boldsymbol{A}$
- No ano: $\boldsymbol{A\frac{D}{Q}}$

Custos de Posse do Stock

- No ciclo**:** $\boldsymbol{ICT\frac{Q}{2} = IC\frac{Q}{D}\frac{Q}{2}}$

$$\boldsymbol{IC\int_0^T (Q - Dt)dt = IC\left(QT - D\frac{T^2}{2}\right) = ICT\frac{Q}{2} = IC\frac{Q}{D}\frac{Q}{2}} \qquad \boldsymbol{(Q - DT = 0 \Longrightarrow Q = DT)}$$

Como $\boldsymbol{\frac{1}{T}\int_0^T (Q - Dt)dt = \frac{Q}{2}}$ é o stock médio, o custo no ciclo é o custo unitário de posse, corrigido para o ciclo, vezes o stock médio (dado que a função que representa o stock ser linear, com inclinação $\boldsymbol{-D}$, o stock médio é a média entre o stock máximo *($\boldsymbol{Q}$) e o* stock mínimo *($\boldsymbol{0}$),* que ocorre imediatamente antes da chegada de uma encomenda)*.* A existência de um stock mínimo igual a zero resulta de a procura ser constante e o modelo ser determinístico (não ter incerteza).

- No ano: $\boldsymbol{IC\frac{Q}{D}\frac{Q}{2}\frac{D}{Q} = IC\frac{Q}{2}}$

Custos totais

- No ciclo**:** $\boldsymbol{CQ + A + IC\frac{Q}{D}\frac{Q}{2}}$
- Médios anuais: $\boldsymbol{CT(Q) = CD + A\frac{D}{Q} + IC\frac{Q}{2}}$ (3.1)

Quantidade Económica da Encomenda – Quanto Encomendar: QEE

Resulta da optimização de (3.1) em relação a $\boldsymbol{Q}$

Condição de 1ª ordem: $\boldsymbol{\frac{dCT(Q)}{dQ} = -A\frac{D}{Q^2} + IC\frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{IC}}}$ (3.2)

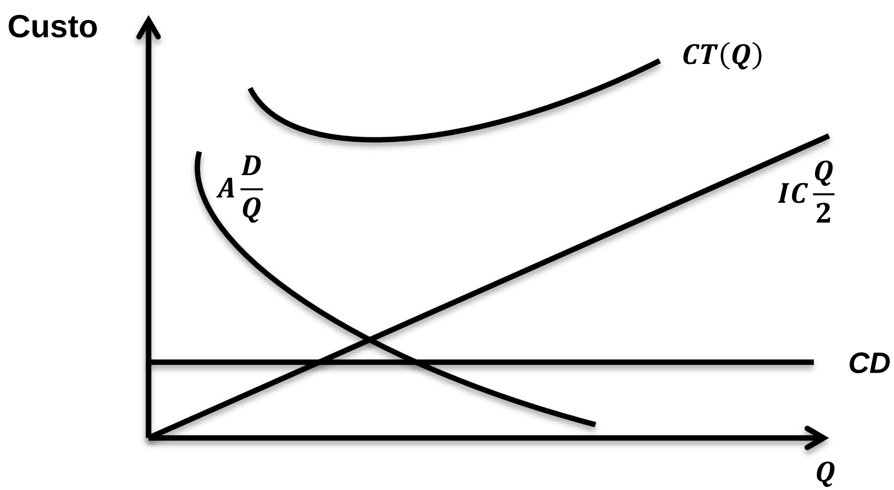
Como $\boldsymbol{\frac{d^2CT(Q)}{dQ^2} = +\frac{2AD}{Q^3} > 0}$, a expressão (3.2) dá um minimizante, neste caso absoluto, pois a função (3.1) é convexa. A expressão (3.2) é designada por **Quantidade Económica da Encomenda** ($\boldsymbol{QEE}$), ou Quantidade de Wilson **(**$\boldsymbol{Q_w}$).

Substituindo em (3.1) o $\boldsymbol{Q}$ dado por (3.2), e simplificando, vem

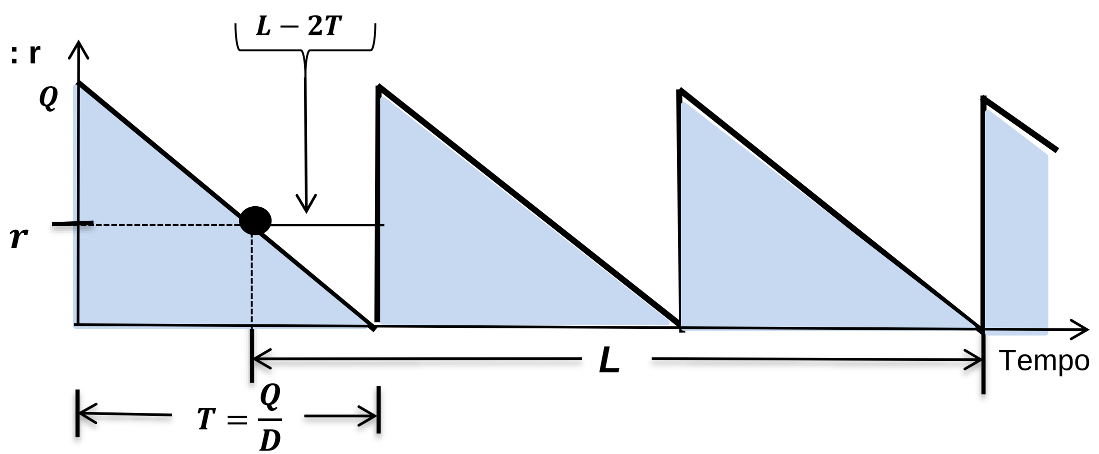
$$\boldsymbol{CT(Q) = CD + A\frac{D}{\sqrt{\frac{2AD}{IC}}} + IC\frac{\sqrt{\frac{2AD}{IC}}}{2},}$$ ou

$$\boldsymbol{CT(Q) = CD + \sqrt{2AICD} = CD + CT_w} \qquad (3.3)$$

que tem a seguinte representação gráfica:



Ponto de Encomenda – Quando encomendar : r



$$\boldsymbol{r = (L - mT)D = LD - mQ} \qquad (3.4)$$

Sendo m a parte inteira de $\frac{L}{T}$, ou nº de ciclos completos em $\boldsymbol{L}$, isto é, $\boldsymbol{m = Int(\frac{L}{T})}$

Nota 1. Se a procura anual é $\boldsymbol{D}$, a procura no período $(\boldsymbol{L-2T})$ é $(\boldsymbol{L-2T})\boldsymbol{D} = \boldsymbol{r}$.

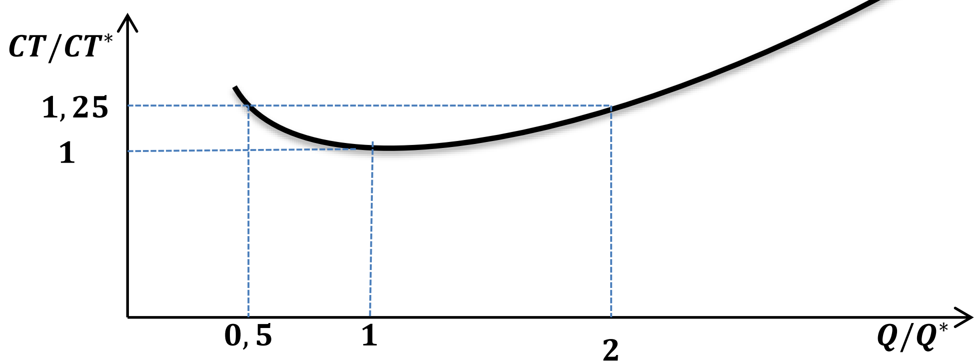
Nota 2. Como a inclinação da função que indica o stock é $-\boldsymbol{D}$, vem $\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{r}}{(\boldsymbol{L-2T})} \Rightarrow \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{L-2T})\boldsymbol{D}$.

Propriedades do Modelo

P1. *A $\boldsymbol{QEE}$ (e o stock médio) varia na razão directa da raiz quadrada da Procura*, isto é, quando a procura varia o stock também varia e no mesmo sentido, mas não na mesma proporção;

P2. *A $\boldsymbol{QEE}$ (e o stock médio) varia na razão inversa do custo unitário do produto, o que implica que a $\boldsymbol{QEE}$ de produtos caros é inferior à de produtos baratos (e que o stock médio, em volume, de produtos caros seja inferior ao stock médio de produtos baratos);*

P3. $$\frac{Q^*}{2} \leq Q \leq 2Q^* \Rightarrow CT_w \leq 1,25CT_w^*$$



P4. *Se $\boldsymbol{L \leq T}$, então o número de encomendas feitas e não recebidas é sempre* **≤ 1**;
Se $\boldsymbol{L > T}$, então o número de encomendas feitas e não recebidas é sempre > 1.

Exemplo 1. Uma empresa de moagem compra trigo e vende farinha para diversos fins. As necessidades mensais de trigo são relativamente constantes e atingem as 1 000 toneladas. O trigo é comprado no exterior ao preço FOB (Free On Board) de 100 u.m./ton (preço à saída, no porto, do fornecedor) e a empresa paga um frete, por barco, de 10 000 u.m., mais 5 u.m. por ton, havendo ainda o seguro que é de 5% sobre o preço a pagar ao fornecedor. Para além destes custos, existem ainda custos administrativos e portuários (à chegada) de 5 000 u.m. por operação (encomenda). O trigo é armazenado, pagando a moagem uma renda de 20 u.m. por ton e por ano em armazém. Os custos financeiros de capital são 10% ao ano. As encomendas demoram 15 dias a chegar. Pretende determinar-se a política de aprovisionamento.

$\boldsymbol{D = 12\,000\ tons}$; $\boldsymbol{C = 100 + 5 + 5 = 110\ u.m.}$; $\boldsymbol{A = 10\,000 + 5\,000 = 15\,000\ u.m.}$; $\boldsymbol{IC = 20 + 0{,}1 * 110 = 31\ u.m.\ por\ ton\ por\ ano}$; $\boldsymbol{L = \frac{1}{24}\ anos}$

$\boldsymbol{Q^* = \sqrt{\frac{2*15\,000*12\,000}{31}} = 3\,408\ tons}$; $\boldsymbol{CT(3\,408) = 110 * 12\,000 + \sqrt{2 * 15\,000 * 12\,000 * 31} = 1\,425\,641}$ *u.m.*

$\boldsymbol{m = Int\left(\frac{\frac{1}{24}}{\frac{3408}{12\,000}}\right) = 0; r = \frac{1}{24} * 12\,000 = 500\ tons}$ ou seja, $\boldsymbol{QEE = 3\,408}$ ***tons*** e ***P. Encomenda= 500 tons***.

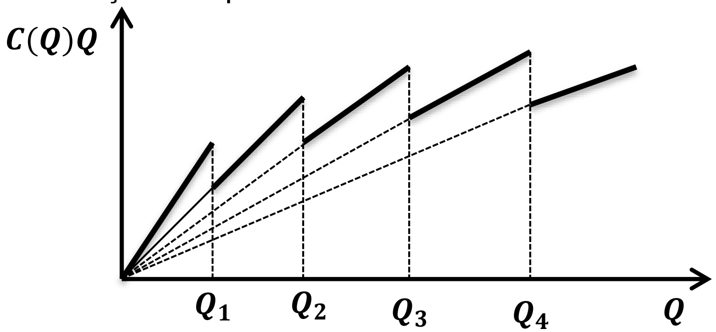
Portanto, a empresa de moagem deve fazer encomendas de 3408 tons, logo que o seu stock atinja as 500 tons. O custo total, incluindo os custos de aquisição, são anualmente, em média, de **1 425 641 u.m**., sendo os custos anuais de encomenda e de stock de **105 641 u.m**., dos quais **52 817 u.m**. correspondem a custos médio anuais com encomendas e **52824 u.m**. correspondem aos custos com a posse do stock, portanto, em proporções aproximadamente iguais.

Outras informações podem ser obtidas. O comprimento do ciclo é $\boldsymbol{T = \frac{3408}{12\,000} = 0{,}284}$ anos, o que representa cerca de **102** dias. O stock médio é de cerca de **1 704** tons de trigo. Por outro lado, nunca está mais do que uma encomenda pendente, pois $\boldsymbol{m = 0}$.

3. Modelo com Descontos de Quantidade de Tipo I (o desconto envolve toda a quantidade comprada)

Neste caso o custo unitário é uma função da Quantidade, havendo economias de escala, com custos unitários mais baixos a partir de determinados montantes. Assume-se uma função do tipo:

$$C(Q) = \begin{cases} C_0 & Q < Q_1 \\ C_1 & Q_1 \leq Q \leq Q_2 \\ & \cdots \\ C_n & Q \geq Q_n \end{cases} \qquad (3,5)$$

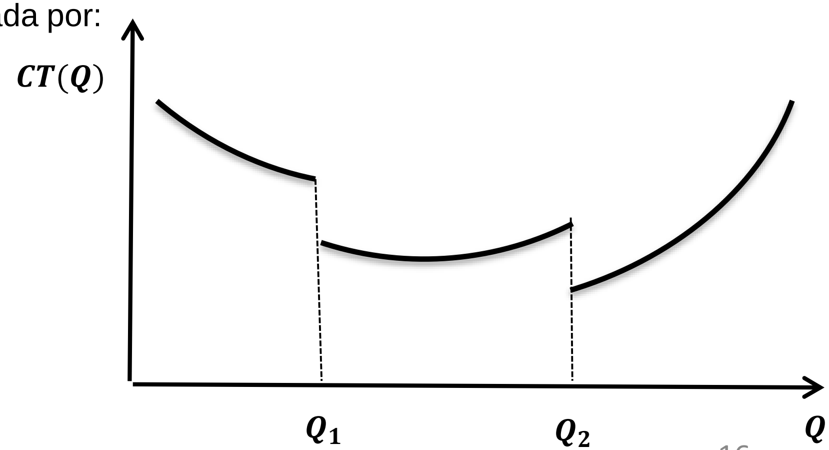


Com $C_0 > C_1 > \cdots C_{n-1} > C_n$

Em geral, o desconto é dado por $C_{j-1} - C_j$, com $j = 1, 2, \ldots, n$.

A expressão do custo total médio por unidade de tempo (ano) é dada por:

$$CT(Q) = \begin{cases} C_0 D + A\frac{D}{Q} + IC_0\frac{Q}{2} & Q < Q_1 \\ C_1 D + A\frac{D}{Q} + IC_1\frac{Q}{2} & Q_1 \leq Q \leq Q_2 \\ \cdots & \\ C_n D + A\frac{D}{Q} + IC_n\frac{Q}{2} & Q \geq Q_n \end{cases} \qquad (3.6)$$



Determinação da Quantidade Económica da Encomenda

Passo1. Calcular $\boldsymbol{Q_w}$ para $\boldsymbol{C = C_n}$

$$\boldsymbol{Q_w^{(n)} = \sqrt{\frac{2AD}{IC_n}}}$$

Se $\boldsymbol{Q_w^{(n)}} \geq \boldsymbol{Q_n}$, $\boldsymbol{Q_w^{(n)}}$ é solução admissível, tendo sido obtida a solução óptima, sendo neste caso a $\boldsymbol{QEE}$ dada por $\boldsymbol{Q^*} = \boldsymbol{Q_w^{(n)}}$; caso contrário, calcular $\boldsymbol{CT(Q_n)}$ e reter como mínimo do custo total, $\boldsymbol{minCT}$, e passar ao passo seguinte.

Passo 2. Calcular $\boldsymbol{Q_w}$ para $\boldsymbol{C = C_{n-1}}$

$$\boldsymbol{Q_w^{(n-1)} = \sqrt{\frac{2AD}{IC_{n-1}}}}$$

Se $\boldsymbol{Q_{n-1}} \leq \boldsymbol{Q_w^{(n-1)}} \leq \boldsymbol{Q_n}$, então está encontrada a solução óptima, sendo $\boldsymbol{Q^*} = \boldsymbol{Q_w^{(n-1)}}$ se $\boldsymbol{CT}\left(\boldsymbol{Q_w^{(n-1)}}\right) \leq \boldsymbol{minCT}$ e $\boldsymbol{Q^*} = Q$ associado ao $\boldsymbol{minCT}$ se não for o caso. Caso contrário, calcular $\boldsymbol{CT(Q_{n-1})}$ e reter $\boldsymbol{minCT} = \mathbf{min}\{\boldsymbol{minCT}, \boldsymbol{CT(Q_{n-1})}\}$. Passar ao passo seguinte.

Passo 3. Repetir o processo para $\boldsymbol{C = C_{n-2}}$ de acordo com o passo 2, e assim sucessivamente até ao cálculo de $\boldsymbol{Q_w}$ para $\boldsymbol{C = C_0}$, se necessário, sendo $\boldsymbol{QEE = Q^* = Q}$ **associado** ao $\boldsymbol{minCT}$, tal como foi efectuado no passo 2.

Nota. Depois de calculada a QEE, calcula-se o ponto de encomenda, tal como foi descrito atrás.

Exemplo 2. O consumo de certa matéria-prima num fábrica pertencente a uma empresa pública é de 10 000 tons/ano. Procedeu-se a um concurso público para selecção de empresas fornecedoras da matéria-prima. As condições para poder ser considerada admitida a concurso são as seguintes:

- Custo de encomenda – 80€
- Prazo de reaprovisionamento – 1 mês

Sabendo que se apresentaram a concurso três fornecedores, diga justificadamente qual selecionaria, considerando as propostas abaixo, e admitindo que a empresa utiliza uma taxa de posse $I = 0{,}30$.

Fornecedor	Tamanho do Lote	Preço em €/ton
A	$\boldsymbol{Q < 250}$	80
B	$\boldsymbol{250 \leq Q < 450}$	75
C	$\boldsymbol{450 \leq Q < 650}$	70

Embora não seja um problema típico de desconto de quantidade, configura uma situação semelhante, podendo ser abordado como tal. Tem-se então:

$$C(\boldsymbol{Q}) = \begin{cases} \mathbf{80} & \boldsymbol{Q < 250} \\ \mathbf{75} & \boldsymbol{250 \leq Q < 450} \\ \mathbf{70} & \boldsymbol{450 \leq Q < 650} \end{cases} \qquad \boldsymbol{D = 10\ \ 000; A = 80; I = 0,30; L = 1\ m\hat{e}s}$$

Começa por determinar-se a Quantidade de Wilson quando o custo é 70, isto é,

$\boldsymbol{Q_w^{(3)}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2*80*10\ 00}}{\mathbf{0{,}3*70}}} = \mathbf{276}$ que é uma solução não admissível, uma vez que este preço só é válido para $\boldsymbol{450 \leq Q < 650}$.

Calcula-se então $CT(450) = 70 * 10\,000 + 80 * \frac{10\,000}{450} + 0{,}3 * 70 * \frac{450}{2} = 701\,845$ e retém-se este valor. Calcula-se seguidamente $\boldsymbol{Q_w^{(2)}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2*80*10\ 00}}{\mathbf{0{,}3*75}}} \approx \mathbf{267}$, que é uma solução admissível. Basta comparar $\boldsymbol{CT}(\mathbf{267})$ com $\boldsymbol{CT}(\mathbf{450})$.

Como $CT(267) = 75 * 10\,000 + \sqrt{2 * 80 * 10\,000 * 0{,}3 * 75} = 756\,000 > 701\,845$, deve ser selecionada a empresa C, isto é, a do preço mais baixo, com encomendas de 450 tons. Como $m = 1$, o Ponto de Encomenda é $r = \frac{10000}{12} - 450 = 383{,}3$.

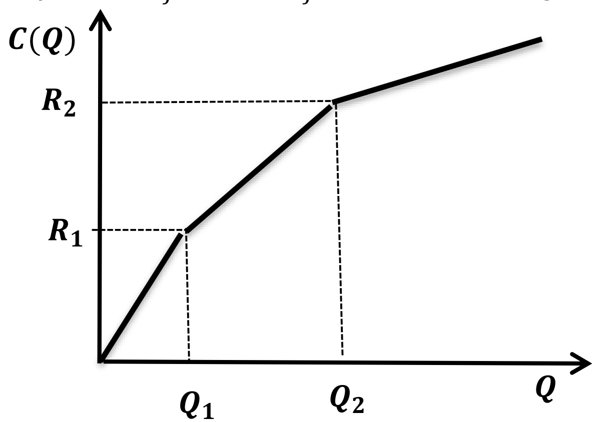
4. Modelo com Descontos de Quantidade de Tipo II ou Descontos Graduais

Nesta situação, os descontos envolvem apenas a parte da quantidade encomendada que ultrapassa o montante a partir do qual o desconto é válido. Seja então:

C_0 – Custo unitário para as unidades até Q_1
C_1 – Custo unitário para as unidades $Q_1 + \mathbf{1}, Q_1 + \mathbf{2}, \ldots Q_2$
…
C_n – Custo unitário para as unidades $Q_n + \mathbf{1}, Q_n + \mathbf{2}, \ldots Q_{n+1}$

Com $\boldsymbol{C_0 > C_1 > \cdots C_{n-1} > C_n}$

A expressão do custo total de aquisição, excluindo custo de encomenda, quando $Q_j < Q \le Q_{j+1}$, é então a seguinte:



$\boldsymbol{C(Q) = R_j + C_j(Q - Q_j)}$ para $j = 0, 1, \ldots, n$

Com $R_j = C(Q_j)$, $R_0 = 0, Q_0 = 0$ e $Q_{n+1} = \infty$

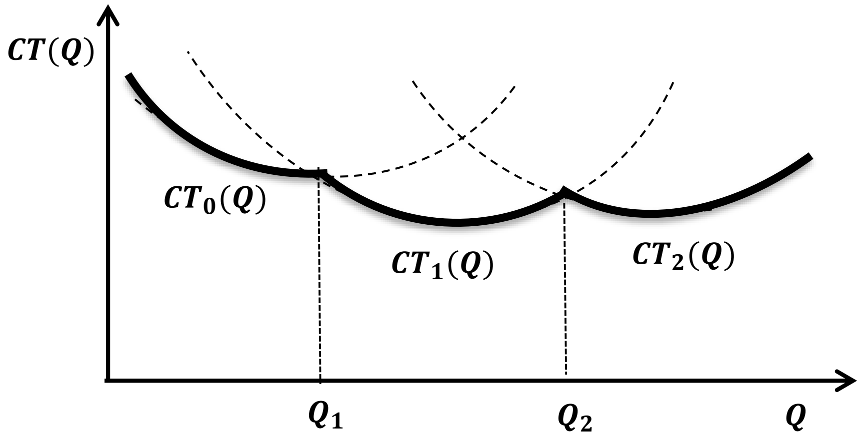
Sendo o custo unitário médio

$$\boldsymbol{\frac{C(Q)}{Q} = \frac{R_j}{Q} + C_j - C_j\frac{Q_j}{Q}}$$

Então, a expressão geral do custo total médio por unidade de tempo (ano), para $Q_j < Q \le Q_{j+1}$ é dada por

$$\boldsymbol{CT_j(Q) = C_jD + \frac{D}{Q}(A + R_j - C_jQ_j) + I\frac{R_j}{2} + I\frac{C_j}{2}Q - I\frac{C_j}{2}Q_j} \quad (3.7)$$

com a seguinte representação gráfica:



$$CT_{j-1}(Q_j) = CT_j(Q_j)$$

Verifica-se que o mínimo não pode ocorrer na quantidade pivot, isto é, em $Q_{j,}\, j = 1, 2, \ldots$. Para obter a quantidade económica (óptima), calcula-se o $\boldsymbol{Q}$ que minimiza $\boldsymbol{CT_j(Q)}$, isto é,

$$\boldsymbol{Q^{(j)}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2D(A+R_j-C_jQ_j)}}{\boldsymbol{IC_j}}} \tag{3.8}$$

Para os valores de $\boldsymbol{Q^{(j)}}$ admissíveis, isto é, $\boldsymbol{Q_j} < \boldsymbol{Q^{(j)}} \leq \boldsymbol{Q_{j+1}}$, determina-se $\boldsymbol{CT_j(Q^{(j)})}$. O $\boldsymbol{Q^{(j)}}$ correspondente ao mínimo (dos custos) é a solução óptima, ou seja, a Quantidade Económica da Encomenda ($\boldsymbol{QEE}$).

Nota. Do exposto resulta que um $\boldsymbol{Q^{(k)}}$ admissível não significa que seja óptimo.

Após determinação da $\boldsymbol{QEE}$, calcula-se o ***Ponto de Encomenda***, tal como foi descrito atrás.

Exemplo 3. Considere-se um produto cujo preço está sujeito ao princípio dos descontos graduais, em que as primeiras 100 unidades têm um preço de 70 € cada, e as unidades suplementares têm um desconto de 5%. A procura anual é de 1 000 unidades e a taxa de posse é de 20%, sendo o custo de cada encomenda de 60 €. O prazo de reaprovisionamento é de uma semana.

Para determinar a quantidade a encomendar começa por determinar-se

$$\boldsymbol{Q^{(0)} = \sqrt{\frac{2AD}{IC_0}} = \sqrt{\frac{2*60*1\,000}{0,2*70}} = 93}$$

Como $\boldsymbol{Q^{(0)}}$ é admissível, calcule-se $\boldsymbol{CT\left(Q^{(0)} = 93\right) = 70*1\,000 + \sqrt{2*60*1\,000*0,2*70} = 71\,296,2.}$ Calcule-se seguidamente $\boldsymbol{Q^{(1)}}$,

$$\boldsymbol{Q^{(1)} = \sqrt{\frac{2D(A+R_1-C_1Q_1)}{IC_1}} = \sqrt{\frac{2*1\,000(60+7\,000-6650)}{0,2*66,5}} = 248,3,}$$

que é uma solução admissível, a que corresponde o custo total

$$\boldsymbol{CT_1\left(Q^{(1)}\right) = C_1D + \frac{D}{Q^{(1)},}(A+R_1-C_1Q_1) + I\frac{R_1}{2} + I\frac{C_1}{2}Q^{(1)} - I\frac{C_1}{2}Q_1}$$
$$\boldsymbol{= 66,5*1\,000 + \frac{1\,000}{248,3}(60+7\,000-6650) + 0,2*\frac{7\,000}{2} + 0,2*\frac{66,5}{2}*248,3 - 0,2*\frac{66,5}{2}*100 = 69\,837,}$$

sendo então o valor óptimo $\boldsymbol{Q^* = Q^{(1)} = 248,3}$, e beneficiar do desconto**,** uma vez que o respectivo custo total médio anual é mais baixo. É dispensável analisar os pontos pivot, visto que a solução óptima nunca ocorrerá em qualquer destes pontos.

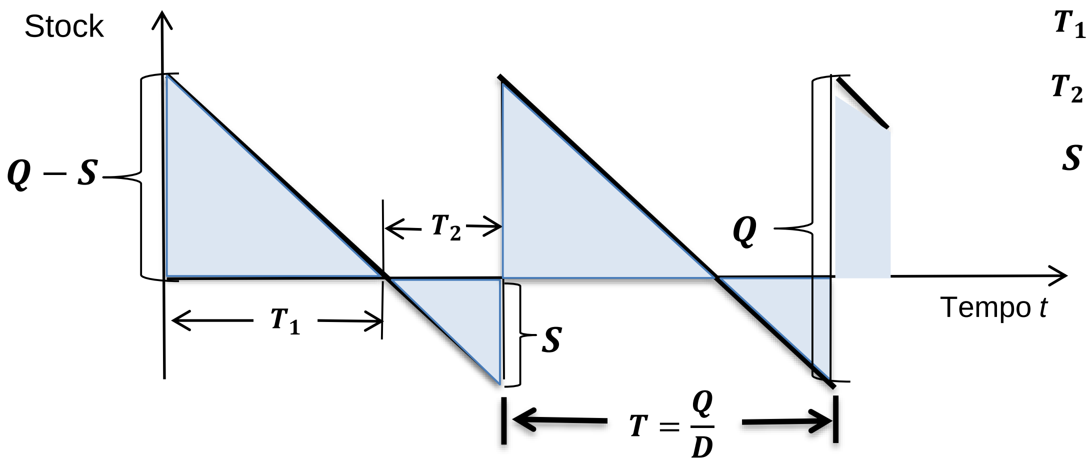
Supondo um ano com 52 semanas, vem para o Ponto de Encomenda,

$$\boldsymbol{r = \frac{1000}{52} - m*248,3 \approx 19 \text{ unidades}}$$

5. Modelo com Ruptura de Stock com Vendas Diferidas

As hipóteses são as mesmas do Modelo de Wilson (ponto 7), excepto a possibilidade de existir ruptura de stock e as vendas serem diferidas, isto é, serem entregues mais tarde, após recepção da encomenda.

Representação gráfica do stock (curva em dentes de serra):



T_1 – *Tempo, no ciclo, em que o sistema não tem ruptura*

T_2 – *Tempo, no ciclo, em que o sistema está em ruptura*

S – *Número de unidades diferidas por ciclo*

Custos de Aquisição

- No ciclo**:** CQ
- No ano: CD

Custos de Encomenda

- No ciclo**:** A
- No ano: $A\frac{D}{Q}$

Custos de Posse do Stock

- No ciclo: $\left(\boldsymbol{IC\frac{Q-S}{2}T_1}\right)=\boldsymbol{IC\frac{(Q-S)^2}{2D}}$, pois $T_1=\frac{Q-S}{D}$

- No ano: $\left(\boldsymbol{IC\frac{Q-S}{2}T_1}\right)\boldsymbol{\frac{1}{T}}=\boldsymbol{IC\frac{(Q-S)^2}{2Q}}$, após substituição de $\boldsymbol{T_1}$ e $\boldsymbol{T}$ pelas suas expressões em função de $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{S}$

Custos de Ruptura de Stock (Venda Diferida)

- No ciclo: $\left(\boldsymbol{p_f S+p_v\frac{S}{2}T_2}\right)=\boldsymbol{p_f S+p_v\frac{S^2}{2D}}$, pois $T_2=\frac{S}{D}$

- No ano: $\left(\boldsymbol{p_f S+p_v\frac{S}{2}T_2}\right)\boldsymbol{\frac{1}{T}}=\boldsymbol{\frac{1}{Q}(p_f SD+p_v\frac{S^2}{2})}$, após substituir $\boldsymbol{T_2}$ e $\boldsymbol{T}$ pelas suas expressões em função de $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{S}$

O objectivo consiste em minimizar a função de custos totais anuais, de modo a obter $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{S}$, respectivamente, quantidade a encomendar e quantidade a diferir por ciclo:

$$\boldsymbol{Min\ CT(Q,S)=CD+A\frac{D}{Q}+IC\frac{(Q-S)^2}{2Q}+\frac{1}{Q}(p_f SD+p_v\frac{S^2}{2})} \qquad (3.9)$$

Obtenção da Solução Óptima

Para resolver o problema, procuramos um mínimo absoluto de (3.9) no domínio $\boldsymbol{0<Q<\infty}$ *e* $\boldsymbol{0\le S}$. A partir de (3.9) verifica-se que para qualquer $\boldsymbol{S}$, a expressão do custo total é infinito desde que $\boldsymbol{Q=0}$ ou $\boldsymbol{Q=\infty}$. Deste modo, valor óptimo de $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q^*}$, deve verificar $\boldsymbol{0<Q^*<\infty}$. Por outro lado, se o valor óptimo de $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S^*}$, não estiver na fronteira, então $\boldsymbol{0<S^*<\infty}$, devendo, neste caso, verificar-se o sistema de de estacionariedade

$$\boldsymbol{\frac{\partial CT}{\partial Q}=\frac{\partial CT}{\partial S}=0} \qquad (3.10)$$

Após derivação, multiplicação de ambos os membros por $\frac{Q^2}{IC}$ e arrumação, vem sucessivamente,

$$\frac{\partial CT}{\partial Q} = -\frac{1}{Q^2}\left[AD + \frac{1}{2}IC(Q-S)^2 + p_f SD + p_v \frac{S^2}{2}\right] + \frac{IC}{Q}(Q-S) = 0$$

$$-\frac{1}{2}(Q-S)^2 + Q(Q-S) = \frac{1}{IC}\left[AD + p_f SD + p_v \frac{S^2}{2}\right]$$

Ou, após resolução em ordem a Q^2,

$$Q^2 = \frac{2}{IC}\left[AD + p_f SD + p_v \frac{S^2}{2}\right] + S^2 \qquad (3.11)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial CT}{\partial S} = -\frac{IC}{Q}(Q-S) + \frac{1}{Q}p_f D + \frac{1}{Q}p_v S = 0$$

O que dá, após explicitar Q em função de S,

$$Q = \frac{p_f D}{IC} + \left(1 + \frac{p_v}{IC}\right)S \qquad (3.12)$$

Para resolver o sistema constituído por (3.11) e (3.12), e obter Q e S em função dos parâmetros do modelo, elimine-se Q, daí resultando

$$\left[p_v^2 + p_v(IC)\right]S^2 + 2p_f p_v DS + (p_f D)^2 - 2AICD = 0 \qquad (3.13)$$

Quando $p_v = 0$, vem para (3.13) $(p_f D)^2 = 2AICD$, que em geral não é verdadeiro, significando então que não existe um valor óptimo para S tal que $0 < S < \infty$. Então, podemos concluir que a solução óptima para S se encontra na fronteira, ou seja, $S = 0$ ou $S = \infty$, sendo fácil verificar qual deles é o valor óptimo, bastando comparar os custos quando se optimiza em relação a Q.

Com efeito, se $S^* = 0$, a expressão (3.9) tem como solução óptima o Q_w, dado por (3.2), sendo o custo total mínimo dado por

$$CT(Q) = CD + \sqrt{2AICD} = CD + CT_w$$

Se $\boldsymbol{S}^* = \infty,$ não existem encomendas (a procura é toda diferida), e o custo mínimo anual é então $\boldsymbol{p_f D},$ o que significa que o sistema não é viável, não devendo funcionar, pois é mais económico suportar os custos de diferir toda a procura anualmente.

Do exposto podemos então concluir-se que se $(\boldsymbol{p_f D})^2 > \boldsymbol{2AICD}$, ou, $\boldsymbol{p_f D} > \sqrt{\boldsymbol{2AICD}} = \boldsymbol{CT_w}$, isto é, $\boldsymbol{p_f} > \sqrt{\frac{\boldsymbol{2AIC}}{\boldsymbol{D}}}$, então a solução óptima corresponde a $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q_w}$ dado por (3.2).

Se $\boldsymbol{p_f} < \sqrt{\frac{\boldsymbol{2AIC}}{\boldsymbol{D}}}$, então o sistema de stocks não deve funcionar, por não ser viável economicamente.

Quando $(\boldsymbol{p_f D})^2 = \boldsymbol{2AICD}$, para qualquer valor de $\boldsymbol{S}$, com $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{S} \leq \infty$, (3.13) verifica-se sempre. Neste caso, $\boldsymbol{p_f} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2AIC}}{\boldsymbol{D}}}$, e é indiferente o sistema funcionar para qualquer valor de $\boldsymbol{S}$ ou não funcionar, sendo o valor óptimo de $\boldsymbol{Q}$ dependente do valor escolhido para $\boldsymbol{S}$.

Quando $\boldsymbol{p_v} \neq \boldsymbol{0},$ a expressão (3.13) é uma equação do 2º grau, sendo a maior das suas soluções (a outra é eliminada por ser não admissível) dada por

$$\boldsymbol{S}^* = \frac{-\boldsymbol{p_f D} + \sqrt{\boldsymbol{2AICD}\left(\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{IC}}{\boldsymbol{p_v}}\right) - \frac{\boldsymbol{IC}}{\boldsymbol{p_v}}(\boldsymbol{p_f D})^2}}{\boldsymbol{p_v} + \boldsymbol{IC}} \qquad (3.14)$$

Para resolver o sistema constituído por (3.11) e (3.12), elimina-se $\boldsymbol{S}$ e resolve-se em ordem a $\boldsymbol{Q}$, vindo

$$Q^2 = \frac{2}{IC}\left[AD + \frac{p_f ICD}{p_v + IC}Q - \frac{(p_f D)^2}{p_v + IC}\right] + \left(\frac{p_v}{IC} + 1\right)\left[\frac{IC}{p_v + IC}Q - \frac{p_v D}{p_v + IC}\right]^2$$

ou, finalmente,

.

$$\boldsymbol{Q}^* = \sqrt{\frac{\boldsymbol{p_v} + \boldsymbol{IC}}{\boldsymbol{p_v}}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{2AD}}{\boldsymbol{IC}} - \frac{(\boldsymbol{p_f D})^2}{\boldsymbol{IC}(\boldsymbol{p_v} + \boldsymbol{IC})}} \qquad (3.15)$$

Se o valor de $\boldsymbol{S}$ obtido a partir de (3.14) for negativo, então o seu valor óptimo está na fronteira, isto é, $\boldsymbol{S}^* = \mathbf{0}$, sendo o valor óptimo dado pelo $\boldsymbol{Q}$ de Wilson, $\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q_w}$.

Uma simplificação importante ocorre quando $\boldsymbol{p_f} = \mathbf{0}$, vindo para (3.15) e (3.14), respectivamente,

$$\boldsymbol{Q}^* = \sqrt{\frac{\boldsymbol{p_v}+\boldsymbol{IC}}{\boldsymbol{p_v}}}\sqrt{\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{IC}}} = \boldsymbol{Q_w}\sqrt{\frac{\boldsymbol{p_v}+\boldsymbol{IC}}{\boldsymbol{p_v}}} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{S}^* = \sqrt{\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{AICD}}{\boldsymbol{p_v}(\boldsymbol{p_v}+\boldsymbol{IC})}} = \frac{\boldsymbol{CT_w}}{\sqrt{\boldsymbol{p_v}(\boldsymbol{p_v}+\boldsymbol{IC})}} \quad (3.17)$$

Do exposto podemos retirar algumas conclusões importantes:

- Quando $\boldsymbol{p_v} = \mathbf{0}$, isto é, não existem custos variáveis de ruptura (só fixos), a não ser que $(\boldsymbol{p_f D})^{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\boldsymbol{AICD}$, ou seja, $\boldsymbol{p_f D} = \boldsymbol{CT_w}$, caso em que é indiferente o montante da ruptura por ciclo, o sistema ou não deve funcionar se $\boldsymbol{p_f D} < \boldsymbol{CT_w}$, ou deve funcionar sem ruptura de stock se $\boldsymbol{p_f D} > \boldsymbol{CT_w}$;

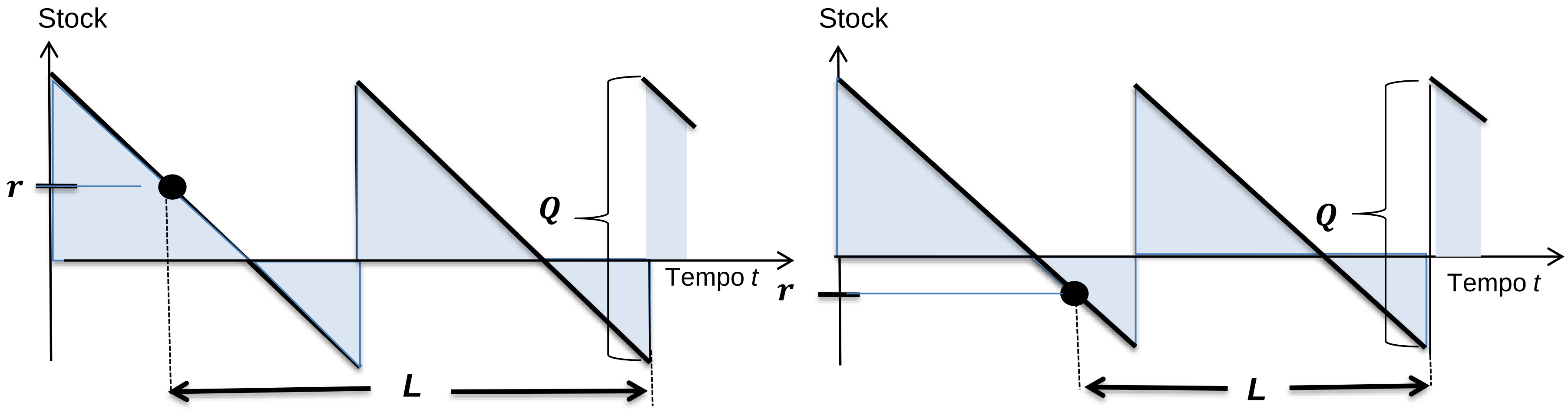
- Quando $\boldsymbol{p_v} \neq \mathbf{0}$, o sistema funciona sem ruptura de stock, o que acontece quando o valor óptimo de $\boldsymbol{S}$ está na fronteira, $\boldsymbol{S}^* = \mathbf{0}$, que ocorre quando $\boldsymbol{p_f D} > \boldsymbol{CT_w}$, ou funciona com um nível de ruptura positivo, que ocorre quando o valor de $\boldsymbol{S}$ dado por (3.14) é positivo;

- Quando $\boldsymbol{p_f} = \mathbf{0}$, isto é, não existem custos fixos de ruptura, aplicam-se (3.16) e (3.17), resultando daí que em condições de funcionamento normal uma certa quantidade da procura deve ser diferida (deve existir alguma ruptura), a não ser que $\boldsymbol{p_v} = \infty$.

Ponto de Encomenda – r

A determinação do ponto de encomenda segue o mesmo procedimento que no modelo anterior, sem ruptura de stock, tendo apenas que se ter em atenção a translacção operada na representação gráfica decorrente do nível de ruptura $\boldsymbol{S}$ em cada ciclo.

Utilizemos novamente a representação gráfica do stock com vendas diferidas:



À semelhança do que se fez atrás, através da representação gráfica, verifica-se que o Ponto de encomenda é dado por:

$$\boldsymbol{r^* = LD - mQ^* - S^*} \quad (3.18)$$

Em que $\boldsymbol{m}$ é o número de ciclos completos contidos no prazo de reaprovisionamento, isto é, a parte inteira de $\boldsymbol{L/T}$, ou $\boldsymbol{Int}\left(\frac{L}{T}\right)$.

Quando $\boldsymbol{r^* < 0}$, significa que o Ponto de Encomenda é atingido quando a quantidade diferida é igual a módulo de $\boldsymbol{r^*}$, $|r^*|$.

Exemplo 4. Considere uma empresa de televisores que encomenda os altifalantes a uma outra, e cuja procura é de 8 000 por mês. O custo fixo de cada lote encomendado é de 6 000 €. Cada altifalante custa 10 €. A taxa de posse é de 20% ao ano. Caso os altifalantes sejam necessários e não estejam disponíveis, estes poderão ser recebido mais tarde, mas com um custo fixo de 0,1€ e um custo variável de 12€/unidade/ano. O prazo de reaprovisionamento é de 1 mês.

A partir de (3.14), tem-se

$$\boldsymbol{S^*} = \frac{-p_fD + \sqrt{2AICD\left(1+\frac{IC}{p_v}\right) - \frac{IC}{p_v}(p_fD)^2}}{p_v + IC} = \frac{-0,1*96\,000 + \sqrt{2*6\,000*0,2*10*96\,000\left(1+\frac{0,2*10}{12}\right) - \frac{0,2*10}{12}(0,1*96\,000)^2}}{12+0,2*10} = 3\,007$$

A partir de (3.15), vem

$$\boldsymbol{Q^*} = \sqrt{\frac{p_v+IC}{p_v}}\sqrt{\frac{2AD}{IC} - \frac{(p_fD)^2}{IC(p_v+IC)}} = \sqrt{\frac{12+0,2*10}{12}}\sqrt{\frac{2*6\,000*96\,000}{0,2*10} - \frac{(0,1*96\,000)^2}{0,2*10(12+0,2*10)}} = 25\,849$$

Quanto ao comprimento do ciclo, é $\boldsymbol{T^*} = \mathbf{25\,849/96000}$ **= 0,269** anos. Como $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$, o ponto de Encomenda é

$$\boldsymbol{r^*} = \boldsymbol{LD} - \boldsymbol{mQ^*} - \boldsymbol{S^*} = \mathbf{8\,000 - 3\,007 = 4\,993} \text{ altifalantes}$$

O custo total médio anual é:

$$\boldsymbol{CT(Q,S)} = CD + A\frac{D}{Q} + IC\frac{(Q-S)^2}{2Q} + \frac{1}{Q}\left(p_fSD + p_v\frac{S^2}{2}\right) = 10*96\,000 + 6\,000*\frac{96\,000}{25\,849} + 0,2*10*\frac{(25\,849-3\,007)^2}{2*25\,849} + \frac{1}{25\,849}*(0,1*3\,007*96\,000 + 12*\frac{(3\,007)^2}{2}) = 1\,004\,571€$$

em que:

C. Aquisição - 960 000€; C. Encomendas – 22 283,4€; C. Stock – 20 184,6€; C. Ruptura – 2 102,5€.

Claro que que o custo sem ruptura (1 008 000€) é superior ao custo com ruptura, caso contrário esta não existira.

Imagine-se que não existem custos fixos de ruptura. Para obter Q^* e S^* aplicavam-se, respectivamente, (3.16) e (3.17),

$$Q^* = Q_w\sqrt{\frac{p_v + IC}{p_v}} = \sqrt{\frac{2*6\,000*96\,000}{0,2*10}}\sqrt{\frac{12+0,2*10}{12}} = 1,08*24\,000 = 25\,923$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2AICD}{p_v(p_v+IC)}} = \sqrt{\frac{2*6\,000*0,2*10*96\,000}{12*(12+0,2*10)}} \approx 3\,703$$

Quanto ao comprimento do ciclo, é $T^* = 25\,923/96000$ **= 0,270** anos. Como $m = 0$, o ponto de Encomenda é

$$r^* = LD - mQ^* - S^* = 8\,000 - 3\,703 = 4\,297 \text{ altifalantes}$$

O custo total médio anual é:

$$CT(Q,S) = CD + A\frac{D}{Q} + IC\frac{(Q-S)^2}{2Q} + \frac{1}{Q}(p_v\frac{S^2}{2})$$

$$= 10*96\,000 + 6\,000*\frac{96\,000}{25\,923} + 0,2*10*\frac{(25\,923-3\,703)^2}{2*25\,923} + \frac{1}{25\,923}*12*\frac{(4\,514)^2}{2} = 1\,004\,443$$

em que:

C. Aquisição - 960 000€; C. Encomendas – 22 219,7€; C. Stock – 19 045,4€; C. Ruptura – 3 177,9€.

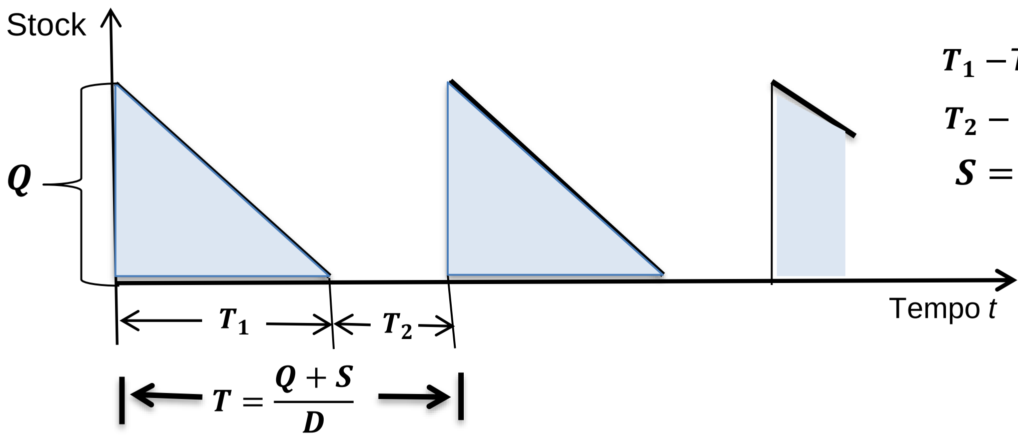
No caso de não existirem custos variáveis de ruptura, mas apenas um custo fixo por unidade em falta, de acordo com a análise efectuada, o sistema não deve funcionar, pois

$$p_f D = 0,1*96\,000 = 9\,600 < 48\,000 = \sqrt{2*6\,000*0,2*10*96\,000} = \sqrt{2AICD}$$

6. Modelo de Ruptura de Stock com Vendas Perdidas

As hipóteses são as mesmas do modelo anterior (ponto 5), excepto que em caso de ruptura de stock as vendas são perdidas. Neste caso, quando chega nova encomenda, ela vai satisfazer a procura que ocorre a partir desse momento.

Graficamente o sistema tem a seguinte representação:



T_1 – *Tempo, no ciclo, em que o sistema não tem ruptura*

T_2 – *Tempo, no ciclo, em que o sistema está em ruptura*

$S = T_2 D$ - *Número de unidades perdidas por ciclo*

Como neste caso a procura que ocorre quando o stock é nulo se traduz em vendas perdidas, os ganhos directos obtidos com a venda do produto deixam de ser independentes da política de stocks, ao contrário do que acontecia nos modelos anteriores, em que as receitas são constantes. A solução passa por optimizar o ganho médio anual (o que também podia ser feito nos modelos anteriores, mas não haveria nenhuma vantagem substancial nisso). No entanto, com uma definição adequada dos custos de ruptura, veremos que é possível manter a metodologia de minimização do custo médio anual.

Seja Π lucro médio anual, V o preço de venda do produto, p_0 (já definido atrás) o custo de ruptura em sentido estrito, excluindo benefício não realizado, e f_0 a fracção do tempo (ano) durante o qual o sistema está em ruptura. Então, o Lucro médio anual é dado por:

$$\Pi = D(V - C)(1 - f_0) - p_0 D f_0 - (Custos\ de\ encomenda + Custos\ de\ Stock)$$

$$\Pi = D(V - C) - (p_0 + V - C) D f_0 - (Custos\ de\ encomenda + Custos\ de\ Stock) \qquad (3.19)$$

Da expressão anterior verifica-se que $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{C})$ representa o ganho directo anual se o sistema não tiver ruptura, e matematicamente é uma constante que não afecta a solução óptima, isto é, é independente da política de gestão. Por outro lado, sabendo que $\boldsymbol{p_1}=\boldsymbol{V}-\boldsymbol{C}$ é o beneficio não realizado no caso de perder a venda (já definido atrás), então $(\boldsymbol{p_0}+\boldsymbol{V}-$

Vindo para a expressão do Custo Médio Anual de encomendas, stock e ruptura (não consideramos o custo total, incluindo o custo de aquisição, pois parte das vendas são perdidas, não havendo, por esta razão, um custo total de aquisição $\boldsymbol{cD}$)

$$\boldsymbol{CT(Q,S) = A\frac{D}{Q+S} + IC\frac{Q^2}{2(Q+S)} + pS\frac{D}{Q+S}} \tag{3.20}$$

Uma condição necessária para que $\boldsymbol{Q^*}$ e $\boldsymbol{S^*}$ sejam óptimos é a verificação de

$$\boldsymbol{\frac{\partial CT}{\partial Q} = 0 = -[Q+S]^{-2}\left[AD + \frac{IC}{2}Q^2 + pDS\right] + ICQ(Q+S)^{-1}}$$

ou

$$\boldsymbol{-AD + \frac{IC}{2}Q^2 - pDS + ICQS = 0} \tag{3.21}$$

e

$$\boldsymbol{\frac{\partial CT}{\partial S} = 0 = -[Q+S]^{-2}\left[AD^2 + \frac{ICD}{2}Q^2 + pD^2S\right] + pD^2(Q+S)^{-1}}$$

ou

$$\boldsymbol{pD = \frac{AD}{Q} + \frac{IC}{2}Q = 0} \tag{3.22}$$

com $\boldsymbol{0 < Q^* < \infty}$ e $\boldsymbol{0 < S^* < \infty}$.

Se resolvermos (3.22) (equação do segundo grau) em ordem a $\boldsymbol{Q}$, vem

$$\boldsymbol{Q = \frac{pD}{IC} \pm \sqrt{\left(\frac{pD}{IC}\right)^2 - \frac{2AD}{IC}}} \tag{3.23}$$

Se $\boldsymbol{(pD)^2 < 2AICD}$, então não existe nenhum valor real para $\boldsymbol{Q}$ a satisfazer (3.22). Neste caso, não existe nenhum valor para $\boldsymbol{S}$, tal que $\mathbf{0} < \boldsymbol{S} < \infty$, que minimize (3.20), devendo o valor de $\boldsymbol{S}$ ser $\mathbf{0}$ ou ∞. Como $(\boldsymbol{pD})^{\mathbf{2}} < \mathbf{2}\boldsymbol{AICD}$, o valor óptimo é obviamente ∞, pois o custo de suportar ruptura permanente $(\boldsymbol{pD})$ é inferior ao de suportar um sistema sem ruptura de stock $(\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{AICD}})$, caso em que $\boldsymbol{S}$ seria nulo. Em termos práticos, não deve existir sistema de stocks, pois o seu funcionamento não é viável economicamente.

Se $(\boldsymbol{pD})^{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\boldsymbol{AICD}$, então existe apenas um valor positivo para Q a verificar (3.22). Esta é uma situação particular em que qualquer valor para $\boldsymbol{S}$ é óptimo, ou seja, é indiferente o sistema funcionar com qualquer ruptura de stocks ou funcionar sem ruptura de stocks.

Finalmente, se $(\boldsymbol{pD})^{\mathbf{2}} > \mathbf{2}\boldsymbol{AICD}$, existem dois valores positivos a verificar (3.22), pois

$$\frac{\boldsymbol{pD}}{\boldsymbol{IC}} > \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{pD}}{\boldsymbol{IC}}\right)^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{IC}}} \qquad (3.24)$$

Se eliminarmos Q no sistema constituído por (3.21) e (3.23), podemos obter

$$\boldsymbol{S} = -\frac{\boldsymbol{pD}}{\boldsymbol{IC}} \pm \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{pD}}{\boldsymbol{IC}}\right)^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{IC}}} \qquad (3.25)$$

Mas, devido a (3.24), resulta que $\boldsymbol{S} < \mathbf{0}$ para cada uma das duas possibilidade de sinal (raízes). Logo, mais uma vez a solução não pertence ao intervalo $\mathbf{0} < \boldsymbol{S} < \infty$, devendo ser $\boldsymbol{S} = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{S} = \infty$. Mas como $(\boldsymbol{pD})^{\mathbf{2}} > \mathbf{2}\boldsymbol{AICD}$, então $\boldsymbol{S}^* = \mathbf{0}$, pois é mais económico funcionar sem ruptura de stock, pois o custo sem ruptura $(\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{AICD}})$ é inferior ao custo de suportar a ruptura $(\boldsymbol{pD})$.

Do exposto podemos então concluir o seguinte para um sistema em que a ruptura assume a forma de venda perdida: em contexto determinístico, salvo nas circunstâncias muito particulares em que $(\boldsymbol{pD})^{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\boldsymbol{AICD}$, um sistema de stocks deve funcionar sem ruptura quando $(\boldsymbol{pD})^2 > \boldsymbol{2AICD}$ $(\boldsymbol{pD} > \sqrt{\boldsymbol{2AICD}})$, ou não deve funcionar quando $(\boldsymbol{pD})^2 < \boldsymbol{2AICD}$ $(\boldsymbol{pD} < \sqrt{\boldsymbol{2AICD}})$ devido à sua não viabilidade económica. Quando $(\boldsymbol{pD})^2 = \boldsymbol{2AICD}$**,** é economicamente indiferente funcionar com ruptura ou sem ruptura.

Exemplo 5. Considere-se o exemplo anterior, mas em que em caso de ruptura a empresa vai comprar o altifalante a outro fornecedor por 11€, não havendo, no entanto qualquer outra penalização.

Os dados do problema anterior mantêm-se, apenas se alteram os custos de ruptura, sendo o sistema de vendas perdidas. Neste caso, tem-se $\boldsymbol{p_1 = 11 - 10 = 1}$ (benefício que se deixa de ter) e $\boldsymbol{p_0 = 0}$, vindo $\boldsymbol{p = p_1 + p_0 = 1 + 0 = 1.}$

Como

$$\boldsymbol{pD = 1 * 96\,000 = 96\,000 > 48\,000 = \sqrt{2 * 6\,000 * 0,2 * 10 * 96\,000} = \sqrt{2AICD}}$$

O sistema deve funcionar sem ruptura de stock.

Sabe-se do exemplo anterior que a quantidade económica da encomenda em caso de não existência de ruptura é $\boldsymbol{Q_w} = 24\,000$ unidades. Deste modo a política consiste em encomendar $\boldsymbol{Q}^*$ =24 000 altifalantes de cada vez, com um ponto de encomenda $\boldsymbol{r^* = LD - mQ^* = 8\,000}$, pois $\boldsymbol{m = 0}$. O custo total é

$$\boldsymbol{CT(24\,000) = 960\,000 + \sqrt{2 * 6\,000 * 0,2 * 10 * 96\,000} = 1\,008\,000€}$$

Se hipoteticamente o custo dos altifalantes no outro fornecedor fosse de 1**0,4€** por unidade, com $\boldsymbol{p = 0,4}$, então o sistema não deveria funcionar, isto é, seria preferível estar permanentemente em ruptura: **0,4*96 000=38 400< 48 000**. Em termos práticos, isto significava que era preferível ir ao outro fornecedor sem necessidade de suportar custos de e encomenda e de stock.

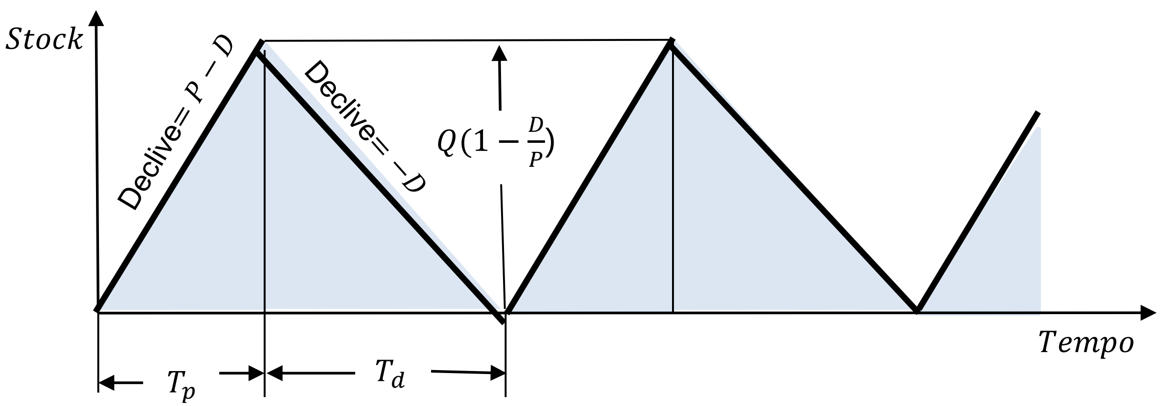
Finalmente, um custo de **10,5€** por altifalante no outro fornecedor, com $\boldsymbol{p = 0,5}$, torna a situação indiferente.

7. Modelo com Taxa de Produção Finita e sem Ruptura de Stock ou Modelo da QEP

Até agora foi suposto que cada encomenda chega ao armazém de uma só vez, ou seja, em bloco através de um lote de montante $\boldsymbol{Q}$. Essa situação é tipificada através de um fornecedor externo. Agora vamos supor que o fornecedor é interno, por exemplo uma unidade de produção da mesma entidade, e à medida que vai produzindo o lote vai-o continuamente enviando para o armazém do departamento que o comercializa e que gere o sistema de stocks em causa. Vamos supor também que a produção do artigo em causa é feita em regime de lotes (*batch* em inglês), ou em regime de campanha, como é conhecido em gestão industrial, e não em regime de produção contínua (produção ininterrupta do mesmo produto).

Qualquer que seja o tamanho do lote a considerar, supõe-se que a taxa de produção anual é $\boldsymbol{P}$, isto é, se o sistema estivesse um ano a produzir ininterruptamente teria capacidade para produzir $\boldsymbol{P}$ unidades. Continuamos a supor que a procura anual é uniforme no tempo, e é $\boldsymbol{D}$. Para que o sistema funcione e faça sentido a escolha do tamanho do lote, deve verificar-se $\boldsymbol{P} > \boldsymbol{D}$. Continuamos a supor que ambas as variáveis são contínuas e que as designações anteriores se mantêm, embora face ao contexto do problema, o custo fixo da encomenda seja substituído por custo de lançamento de uma ordem de produção, incluindo a preparação dos equipamentos de produção para o efeito, mas mantendo a designação $\boldsymbol{A}$.

Graficamente, o sistema tem a seguinte representação:



em que $\boldsymbol{T_p}$ é o tempo, no ciclo, em que o sistema está a produzir, e a vender, sendo também o tempo que dura a campanha a produzir um lote de tamanho $\boldsymbol{Q}$. Por sua vez, $\boldsymbol{T_d}$ é o tempo, no ciclo, que demora a vender o stock atingido no fim da campanha. Durante este intervalo de tempo, relativamente a este produto, o sistema está apenas a vender.

Como estamos em modelo determinístico, sem incerteza, o stock mínimo é nulo. Como $\boldsymbol{T_p = \frac{Q}{P}}$, visto ser o tempo que demora a produzir um lote de tamanho $\boldsymbol{Q},$ o stock máximo, atingido no fim da campanha, é dado por:

$$Stock\ Máximo = \boldsymbol{(P-D)T_p = (P-D)\frac{Q}{P} = Q\left(1-\frac{D}{P}\right)} \tag{3.26}$$

E o tempo necessário para esgotar esse stock é

$$\boldsymbol{T_d = \frac{Q}{D}\left(1-\frac{D}{P}\right)} \tag{3.27}$$

O comprimento do ciclo é $\boldsymbol{T = T_p + T_d = Q/D.}$

Os custos anuais de produção, lançamento da produção e stock são então dados por:

$$\boldsymbol{CT(Q) = CD + A\frac{D}{Q} + IC\frac{Q}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)} \tag{3.28}$$

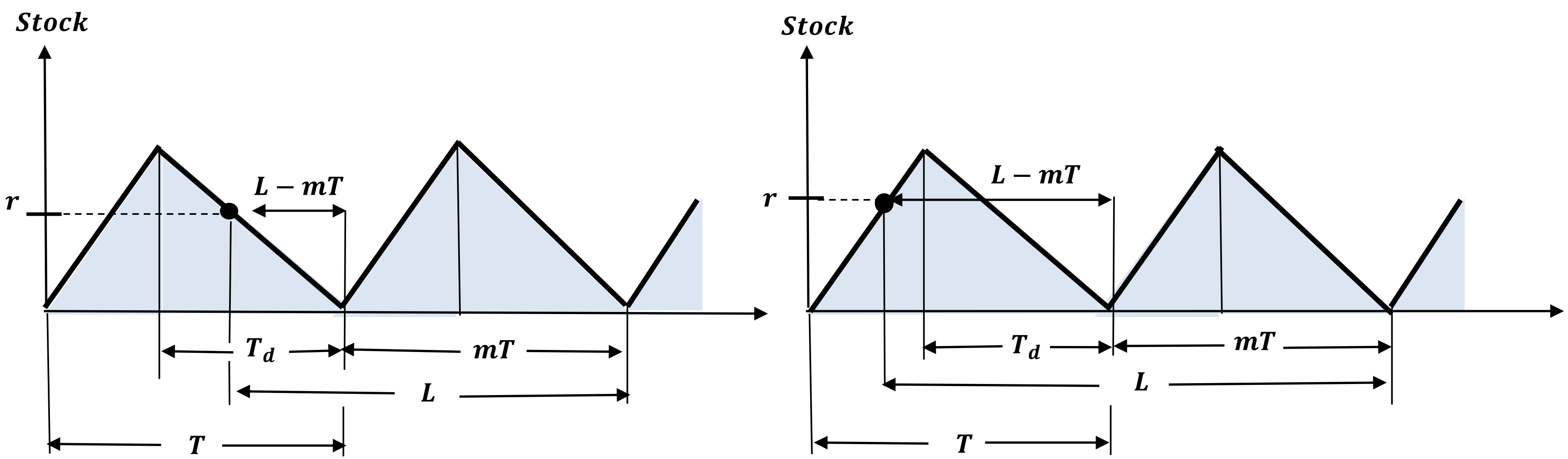
Para obter a quantidade óptima a produzir, ou *Quantidade Económica da Produção* ($\boldsymbol{QEP}$), faz-se

$$\boldsymbol{\frac{\partial CT}{\partial Q} = 0 = -A\frac{D}{Q^2} + \frac{IC}{2}(1-\frac{D}{P})}$$

Vindo então

$$\boldsymbol{QEP = Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{IC}\,\frac{P}{P-D}} = Q_w\sqrt{\frac{P}{P-D}}} \tag{3.29}$$

Vamos determinar o Ponto de Encomenda, utilizando a representação gráfica, nas duas situações em que ele pode ocorrer: na fase crescente do stock, ou fase de produção (à esquerda) e na fase descendente do stock (á direita).



Quando $\boldsymbol{L-mT \leq T_d}$, o Ponto de Encomenda é então $\boldsymbol{r=(L-mT)D=LD-mQ}$, pois $\boldsymbol{Q=TD}$. Quando $L-\boldsymbol{mT > T_d}$, o Ponto de Encomenda é $\boldsymbol{r=[T-(L-mT)](P-D)}$, isto é, $\boldsymbol{r=L(D-P)+(m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q}$. Em síntese:

$$\boldsymbol{r^* = \begin{cases} LD - mQ^* & L-mT \leq T_d \\ LD - LP + (m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q^* & L-mT > T_d \end{cases}} \qquad (3.30)$$

Nota. No caso de o fornecedor ser um departamento de produção pertencente à mesma entidade, o custo de produção a considerar deverá ser o custo variável de produção e eventuais custos variáveis de movimentação e transporte até o produto entrar no armazém (stock).

Este modelo, quando utilizado em confronto com o modelo de encomenda no exterior (modelos anteriores), permite ainda fundamentar decisões do tipo: *produzir internamente ou encomendar no exterio*r.

Exemplo 6. Uma empresa pode produzir mensalmente 2 000 tons de uma resina sintética cuja procura anual é de 15 000 tons. O custo de produção é de 200 € por ton. O custo associado à preparação e lançamento de um lote é de 1 000 €. O custo de posse é de 60 €/ton/ano. O tempo de preparação do equipamento para iniciar a produção de um novo lote (limpeza das máquinas, afinação, etc.) é de uma semana. Logo que se inicia a campanha, à medida que a resina vai sendo produzida vai sendo armazenada até ser completamente escoada para os clientes.

$\boldsymbol{P = 24\,000}$ **tons**; $\boldsymbol{D = 15\,000}$ **tons**; $\boldsymbol{A = 1\,000€}$; $\boldsymbol{IC = h = 60€}$; $\boldsymbol{L = \frac{1}{52} = 0,019}$ **anos**

$$\boldsymbol{QEP = Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{IC}\,\frac{P}{P-D}} = Q_w\sqrt{\frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2*1000*15\,000}{60}\,\frac{24\,000}{24\,000-15\,000}} = 707,1*1,633 \approx 1\,155}\ \text{tons}$$

$$\boldsymbol{T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{1\,155}{15\,000} = 0,077}\ \text{anos; }\boldsymbol{T_d^* = \frac{Q^*}{D}\left(1-\frac{D}{P}\right) = 0,077*\left(1-\frac{15}{24}\right) = 0,029}\ \text{anos; }\boldsymbol{m = Int\left(\frac{0,019}{0,077}\right) = 0}$$

Como $\boldsymbol{L - mT = 0,019 < 0,029,}$ então

$\boldsymbol{r^* = LD - mQ^* = 0,019*15\,000 = 288,5}$ tons

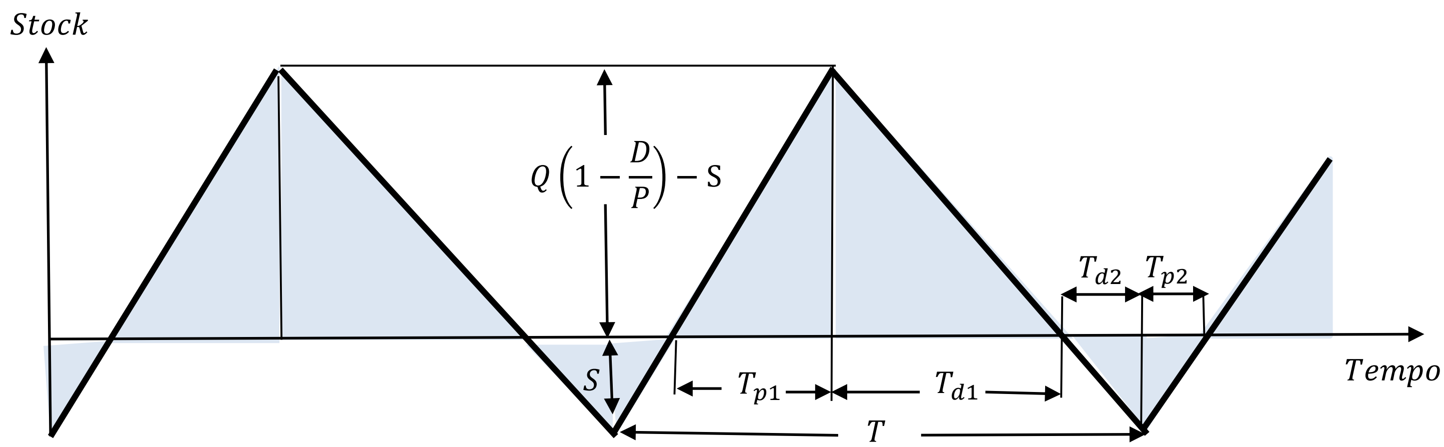
O custo total, excluindo o custo de produção, é:

$$\boldsymbol{CT(1\,155) = A\frac{D}{Q} + IC\frac{Q}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right) = 1\,000*\frac{15\,000}{1\,155} + 60*\frac{1\,155}{2}\left(1-\frac{15\,000}{24\,000}\right) = 25\,981€}$$

Cada campanha dura $\boldsymbol{T_p^* = \frac{Q^*}{P} = \frac{1\,155}{24\,000} = 0,048}$ anos.

8. Modelo com Taxa de Produção Finita com Vendas Diferidas

Este modelo difere do anterior pelo facto de haver a possibilidade de diferir vendas, ainda que incorrendo em custos de ruptura. Quanto aos custos de ruptura, mantêm-se as designações anteriores já utilizadas no modelo de encomendas com vendas diferidas (ponto 10).Graficamente, o sistema tem a seguinte representação:



Custos de Produção Anuais: CD

Custos de Lançamento Anuais: $A\frac{D}{Q}$

Custo de Stock Anuais: $IC\,\frac{Q\left(1-\frac{D}{P}\right)-S}{2}\left(T_{p1}+T_{d1}\right)\frac{1}{T}=IC\,\frac{Q\left(1-\frac{D}{P}\right)-S}{2}\left(\frac{Q\left(1-\frac{D}{P}\right)-S}{P-D}+\frac{Q\left(1-\frac{D}{P}\right)-S}{D}\right)\frac{D}{Q}$

$$=IC\,\frac{\left[Q\left(\frac{P-D}{P}\right)-S\right]^2}{2Q}\,\frac{P}{P-D}$$

Custos de Ruptura Anuais: $[p_f S + p_v \frac{S}{2}(T_{p2} + T_{d2})]\frac{1}{T} = \left[p_f S + p_v \frac{S}{2}\left(\frac{S}{P-D} + \frac{S}{D}\right)\right]\frac{D}{Q}$

$$= \frac{1}{Q}(p_f SD + p_v \frac{S^2}{2}\frac{P}{P-D})$$

após simplificação e atendendo a que $T = \frac{D}{Q}$, $T_{p2} = \frac{S}{P-D}$ e $T_{d2} = \frac{S}{D}$.

De igual forma, o objectivo consiste em minimizar a função de custos totais anuais, de modo a obter Q e S, respectivamente, quantidade a produzir e quantidade a diferir por ciclo:

$$Min\ CT(Q,S) = CD + A\frac{D}{Q} + IC\frac{[Q\left(\frac{P-D}{P}\right)-S]^2}{2Q}\frac{P}{P-D} + \frac{1}{Q}(p_f SD + p_v \frac{S^2}{2}\frac{P}{P-D}) \quad (3.31)$$

Quando $p_v \neq 0$, vem

$$Q^* = \sqrt{\frac{p_v+IC}{p_v}}\sqrt{\frac{2AD}{IC}\frac{P}{P-D} - \frac{(p_f D)^2}{IC(p_v+IC)}} \quad (3.32)$$

$$S^* = (1-\frac{D}{P})\frac{-p_f D+\sqrt{\frac{P}{P-D}2AICD\left(1+\frac{IC}{p_v}\right) - \frac{IC}{p_v}(p_f D)^2}}{p_v+IC} \quad (3.33)$$

À semelhança do modelo do ponto 10, demonstra-se que se $p_v = 0$, $S^* = 0$ ou $S^* = \infty$. No caso em que $S^* = 0$, aplica-se o modelo anterior e a quantidade económica a produzir é dada por (3.29). Quando $p_f = 0$, basta substituir em (3.32) e (3.33), resultando daí que em condições de funcionamento normal uma certa quantidade da procura deve ser diferida (deve existir alguma ruptura), a não ser que $p_v = \infty$. No caso de vendas perdidas, as conclusões são semelhantes às tiradas no modelo do ponto 11, e o sistema ou não funciona ou funciona sem ruptura de stock.

Neste caso o ponto de encomenda é dado pela expressão:

$$r^* = \begin{cases} LD - mQ^* - S^* & L - mT \le T_d \\ LD - LP + (m+1)\left(\frac{P}{D} - 1\right) Q^* - S^* & L - mT > T_d \end{cases} \quad (3.30)$$

Quando $r^* < 0$, deve ser lançada nova ordem de produção quando as vendas diferidas atingirem o valor $|r^*|$, seja na fase em que o sistema está apenas a vender $(L - mT \le T_d)$, seja na fase em que o sistema já está em campanha a produzir $(L - mT > T_d)$.

Exemplo 7. No exemplo anterior considere-se a possibilidade de deferimento com os seguintes custos: $p_f = 3$ **€** e $p_v = 50$ €.

Então

$$QEP = \sqrt{\frac{p_v + IC}{p_v}} \sqrt{\frac{2AD}{IC}\frac{P}{P-D} - \frac{(p_f D)^2}{IC(p_v + IC)}} = \sqrt{\frac{50+60}{50}} * \sqrt{\frac{2*1\,000*15\,000}{60} * \frac{24\,000}{24\,000 - 15\,000} - \frac{(3*15\,000)^2}{60*(50+60)}} \approx \textbf{1 503 tons}$$

$$S^* = \left(1 - \frac{D}{P}\right) \frac{-p_f D + \sqrt{\frac{P}{P-D} 2AICD\left(1 + \frac{IC}{p_v}\right) - \frac{IC}{p_v}(p_f D)^2}}{p_v + IC} = \left(1 - \frac{15\,000}{24\,000}\right) * \frac{-3*15\,000 + \sqrt{\frac{24\,000}{24\,000-15\,000}*2*1\,000*60*15\,000*\left(1+\frac{60}{50}\right) - \frac{60}{50}*(3*15\,000)^2}}{50+60} \approx \textbf{154 t}$$

$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{1\,503}{15\,000} = 0,1$ anos; $T_d^* = \frac{Q^*}{D}\left(1 - \frac{D}{P}\right) = 0,1 * \left(1 - \frac{15}{24}\right) = 0,038$ anos; $m = Int\left(\frac{0,019}{0,,1}\right) = 0$

Como $L - mT = 0,019 < 0,038 = T_d^*$, então

$r^* = \boldsymbol{LD - mQ^* - S^* = 0,019 * 15\,000 - 154 \approx 134,5}$ tons, ou seja quando o stock atingir cerca de 135 tons, na fase descendente do stock, deve ser lançada nova ordem de produção.

Obtemos ainda a seguinte informação: $\boldsymbol{T^*_{p1} = 0,046}$; $\boldsymbol{T^*_{p2} = 0,017; T^*_p = 0,063; T^*_{d1} = 0,027; T^*_{d2} = 0,01.}$

O custo total, excluindo o custo de produção, é:

$$\boldsymbol{CT(6\,416, 6\,182) = A\frac{D}{Q} + IC\frac{[Q\left(\frac{P-D}{P}\right) - S]^2}{2Q}\frac{P}{P-D} + \frac{1}{Q}(p_f SD + p_v \frac{S^2}{2}\frac{P}{P-D}) =}$$

$$\boldsymbol{= 1\,000 * \frac{15\,000}{1\,503} + \frac{60 * [1\,503\left(1 - \frac{15\,000}{24\,000}\right) - 154]^2}{2 * 1\,503}\frac{24\,000}{24\,000 - 15\,000} + \frac{1}{1503} * (3 * 154}$$

$$\boldsymbol{* 15\,000 + 2 * \frac{154^2}{2} * \frac{24\,000}{24\,000-15\,000})} = \textbf{24 574€}$$

Finalmente, o custo total anual, excluindo o custo de produção, pode ser decomposto nas seguintes componentes:
Custo de Encomenda – 9 982€; Custo de Stock – 8 930€; Custo de Ruptura – 5 663€.

Exemplo 8. Considere-se o mesmo exemplo, mas em que não existe custo fixo de ruptura. Neste caso a solução é computacionalmente mais simples de obter, bastando fazer $\boldsymbol{p_f = 0}$ em (3.32) e (3.33). Vem então:

$\boldsymbol{QEP = 1\,713}$ tons; $\boldsymbol{S^* = 350}$ tons; $\boldsymbol{T^* = 0,114}$ anos; $\boldsymbol{T^*_p = 0,071}$ anos; $\boldsymbol{T^*_d} = 0{,}043$ anos; $\boldsymbol{T^*_{p1} = 0,032}$ anos; $\boldsymbol{T^*_{p2} = 0,039}$ anos; $\boldsymbol{T^*_{d1} = 0,020}$ anos; $\boldsymbol{T^*_{d2} = 0,023}$ anos: $\boldsymbol{m = 0}$.

Como $\boldsymbol{L - mT = 0,019 < 0,043 = T_d^*}$, então $r^* = \boldsymbol{LD - mQ^* - S^* = 0,019 * 15\,000 - 350} \approx -62$ tons, ou seja quando o montante diferido atingir cerca de 62 tons, na fase descendente do stock, deve ser lançada nova ordem de produção.

Finalmente, o custos totais anuais, excluindo os custos de produção, são os seguintes:

Custo total – 17 516€; Custo Encomendas – 8 758€; Custo Stocks – 3 981€; Custos Ruptura – 4 777€.

Exemplo 9. Imagine-se agora a situação anterior, mas em que apenas existem os custos fixos de ruptura, no caso $\boldsymbol{p_f = 3}$€.

No caso em que não existe custo variável de ruptura, já sabemos que o sistema funciona sem ruptura de stock ou não funciona, pois a solução óptima verifica-se com $\boldsymbol{S^* = 0}$ ou com $\boldsymbol{S^*} = \infty$.

A partir da análise efectuada atrás, sabe-se que o custo total sem ruptura de stock, isto é, quando $\boldsymbol{S^* = 0}$, excluindo os custos de produção, atinge o valor de **25 981€**. Por outro lado, se o sistema diferir todas as vendas, então o custo total é $\boldsymbol{p_f D = 3 * 15\,000 = 45\,000}$€**,** donde se conclui que o sistema deve funcionar sem ruptura de stock, sendo a solução a encontrada atrás com este modelo (modelo sem ruptura de stock), isto é, $\boldsymbol{QEP = Q^* = 1\,155}$ tons e $\boldsymbol{S^* = 0}$.

Exemplo 10. Considere-se o exemplo anterior, mas em que as vendas são perdidas, sendo o produto vendido por **230€/ton**, não havendo qualquer penalização pela falta do produto.

Neste caso o custo de ruptura resume-se ao benefício não realizado pela perda da venda, sendo então $\boldsymbol{p = 230 - 200 = 30}$€. Como o sistema só deve funcionar sem ruptura de stock ou não funcionar (equivalente a perder a totalidade das vendas), verifica-se que $\boldsymbol{pD = 30 * 15\,000}$**= 450 000€**, valor manifestamente superior ao custo total sem ruptura, excluindo o custo de produção, já obtido atrás, que é **25 981€.** Ou seja, os ganhos anuais superam os custos com o sistema de gestão de stocks.

9. Modelo com Restrições

A maioria dos sistemas reais funcionam com vários produtos, havendo alguma forma de relação entre eles, ou porque alguns podem ser encomendados conjuntamente, ou porque disputam o mesmo espaço de armazenagem, ou ainda porque disputam recursos financeiros limitados, etc. Neste ponto analisaremos os casos em que eles são encomendados separadamente, por exemplo devido a fornecedores diferentes, mas disputam recursos comuns ou estão condicionados a limitações administrativas no número de encomendas.

Limite na capacidade de armazenagem

Supõe-se um sistema com $\boldsymbol{n}$ produtos e sem ruptura de stocks e sem escalonamento das encomendas. O não escalonamento das encomendas implica que se atinja o stock máximo de cada um dos produtos ao mesmo tempo. Seja então:

$\boldsymbol{f_j}$ – Espaço ocupado pelo produto $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$

$\boldsymbol{f}$ – Espaço disponível

As restantes designações mantêm-se, apenas com a inclusão do índice j referente ao produto respectivo.

O objectivo consiste em

$$\boldsymbol{Min\ CT}(\boldsymbol{Q_1}, \dots, \boldsymbol{Q_n}) = \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{C_j D_j} + \boldsymbol{A_j} \frac{\boldsymbol{D_j}}{\boldsymbol{Q_j}} + \boldsymbol{I_j C_j} \frac{\boldsymbol{Q_j}}{\mathbf{2}}\right) \tag{3.31}$$

sujeito a $\sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f_j Q_j} \le \boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{Q_j} > \mathbf{0}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ (3.32)

.

Trata-se de um problema de programação não linear (a função objectivo é não linear), com uma restrição linear. A forma mais adequada de resolver este problema é utilizar um software adequado. Por exemplo, o Solver permite em geral resolver este tipo de problemas com grande facilidade desde que não sejam demasiado grandes.

A resolução manual pode ser efectuada através dos seguintes passos:

1. Determinar o óptimo livre, isto é sem ter em conta a restrição. A solução obtida é dada por

$$\boldsymbol{Q_j} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2A_jD_j}}{\boldsymbol{I_jC_j}}}\ , j = 1,2, \dots , n \tag{3.33}$$

Testar a restrição, isto é, verificar se a solução $(\boldsymbol{Q_1}, \boldsymbol{Q_2}, \dots, \boldsymbol{Q_n})$, obtida em (3.33), é admissível (os produtos cabem no espaço disponível). Se a solução é admissível, ela é a solução óptima; caso contrário, prosseguir com a restrição activa e passar ao passo seguinte.

2. Construir a *Lagrangeana*,

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q_1}, \dots, \boldsymbol{Q_n}) = \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{C_jD_j} + \boldsymbol{A_j}\frac{\boldsymbol{D_j}}{\boldsymbol{Q_j}} + \boldsymbol{I_jC_j}\frac{\boldsymbol{Q_j}}{\boldsymbol{2}}) + \lambda(\boldsymbol{f} - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f_jQ_j}) \tag{3.34}$$

e resolver o sistema de estacionariedade,

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}(.)}{\partial \boldsymbol{Q_j}} = +\frac{\boldsymbol{I_jC_j}}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{A_jD_j}}{\boldsymbol{Q_j^2}} - \boldsymbol{\lambda f_j} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}(.)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = (\boldsymbol{f} - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f_jQ_j}) = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{Q_j^*} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2A_jD_j}}{\boldsymbol{I_jC_j-\lambda^*f_j}}}\text{ , } j = 1,2,\dots,n \text{ e } \boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} f_j(Q_j^*) = f} \tag{3.35}$$

A forma manual mais adequada de calcular o multiplicador de Lagrange, λ, é iterativamente, após o que se calculam os Q_j.

Como a função $\boldsymbol{f - \sum_{j=1}^{n} f_j\sqrt{\frac{2A_jD_j}{I_jC_j-\lambda^*f_j}}}$ é monótona decrescente em λ, e negativa quando $\lambda = 0$, existe um valor único $\lambda^* < \boldsymbol{0}$ em que se verifica a restrição $\boldsymbol{f - \sum_{j=1}^{n} f_j\left(Q_j^*\right) = 0}$.

Prova-se que $\frac{\partial \boldsymbol{CT^*(Q_1,\dots,Q_n)}}{\partial \boldsymbol{f}} = \lambda^*$, sendo $\boldsymbol{CT^*(Q_1,\dots,Q_n)}$ o valor mínimo para a função objectivo (custo total médio no período), podendo então interpretar-se λ^* como a variação do custo mínimo devido a uma variação unitária da capacidade de armazenagem, também designado por *custo marginal de armazenagem* ou *preço sombra* deste recurso. Se analisarmos o problema nesta perspectiva, isto é, se imputarmos um custo unitário λ^* a cada unidade de armazenagem por ano em vez de uma restrição à sua capacidade, o custo anual será dado por

$$\boldsymbol{CT(Q_1,\dots,Q_n) = \sum_{j=1}^{n}\left(C_jD_j + A_j\frac{D_j}{Q_j} + I_jC_j\frac{Q_j}{2}\right) - \lambda^*\sum_{j=1}^{n} f_jQ_j} \tag{3.36}$$

e a solução $(\boldsymbol{Q_1,\dots,Q_n})$ que minimiza (3.31) sujeito a (3.32) é a mesma que minimiza (3.36). O problema formalizado de acordo com (3.36), que atribui um custo à capacidade de armazenagem, e não um limite superior à sua utilização, é designado por *problema dual* do problema dado por (3.31) e (3.32), sendo este designado por *problema primal* daquele. Tal como já sabíamos da programação linear, os dois problemas estão relacionados e têm a mesma solução.

Limite ao Número Anual de Encomendas

Neste caso, tem-se o seguinte modelo:

$$\boldsymbol{Min\ CT(Q_1, \ldots, Q_n) = \sum_{j=1}^{n}\left(C_j D_j + A_j \frac{D_j}{Q_j} + I_j C_j \frac{Q_j}{2}\right)} \tag{3.37}$$

sujeito a $\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{Q_j} \leq N$ e $Q_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$ (3.38)

Sendo N o número máximo de encomendas por ano, devendo N ser um número inteiro. O procedimento para resolver o problema é semelhante ao do caso anterior, apenas com a particularidade de a restrição neste ser caso ser formalmente diferente, isto é, não linear. Se a solução obtida em optimização livre for adimissível, então os valores obtidos constituem a solução óptima. Caso contrário, constrói-se a Lagrangeana e obtém-se o óptimo condicionado, ou seja,

$$L(Q_1, \ldots, Q_n) = \sum_{j=1}^{n}\left(C_j D_j + A_j \frac{D_j}{Q_j} + I_j C_j \frac{Q_j}{2}\right) + \lambda\left(N - \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{Q_j}\right) \tag{3.39}$$

e resolve-se o sistema de estacionaridade, daí resultando

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2(A_j - \lambda^*)D_j}{I_j C_j}},\ j = 1,2, \ldots, n \text{ e } \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{Q_j^*} = N \tag{3.40}$$

Podendo o λ^* ser calculado iterativamente e assumindo valores negativos.

Nota. Quando $A_j = 0$, o valor de λ^* pode ser obtido explicitamente fazendo $\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{\sqrt{\frac{-2\lambda^* D_j}{I_j C_j}}} = N$ e resolvendo em ordem a λ^*,

vindo $\lambda^* = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{I_j C_j D_j}}{N}\right]^2$.

Tal como anteriormente, o solver permite resolver rapidamente este tipo de problem (não linear). O valor de λ^* pode ser interpretado como o custo marginal de passagem de uma encomenda.

Limite ao montante investido em stock

Neste caso, tem-se o seguinte modelo:

$$Min\ CT(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{j=1}^{n}(C_j D_j + A_j \frac{D_j}{Q_j} + I_j C_j \frac{Q_j}{2}) \quad (3.41)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \leq B \text{ e } Q_j > 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.42)$$

Sendo B o montante máximo, em qualquer momento, a ser investido em stocks. (mais uma vez não consideramos a possibilidade de escalonar encomendas de modo a não ter um stock máximo simultâneo para todos os produtos).

Verifica-se facilmente que este caso é semelhante ao do limite na capacidade de armazenagem, em que f_j e f foram substituídos por C_j e B, respectivamente.

Nota. No caso de existirem várias restrições, o problema pode ainda ser resolvido manualmente, com a introdução sucessiva das diversas restrições, primeiro uma de cada vez, depois aos pares, e assim sucessivamente. No entanto, estas resoluções tornam-se demasiado laboriosas quando feitas manualmente, pelo que recurso a métodos computacionais de optimização não linear se torna indispensável.

Exemplo 11. O serviço de compras de um armazém defronta-se com o aprovisionamento de três produtos. Estes produtos estão submetidos a uma restrição sobre o valor médio do stock, não podendo este ultrapassar os 12 000 €. Os dados relativos aos produtos são os seguintes:

Taxa de posse $I = 25\%$ (ano)

Produto	1	2	3
Procura anual	1 000	3 000	2 000
Custo Encomenda (€)	50	50	50
Custo unitário (€)	150	50	100

O óptimo livre indica os seguintes valores para as quantidades a encomendar: $\boldsymbol{Q_1^* \approx 51,64}$; $\boldsymbol{Q_2^*} \approx$ **154,92;** $\boldsymbol{Q_3^*}\approx$ **89,44.** verifica-se facilmente que esta solução não satisfaz a restrição. Com efeito,

$$\mathbf{150 * \frac{51,64}{2} + 50 * \frac{154,92}{2} + 100 * \frac{89,44}{2} = 12\,218,1 > 12\,000}$$

A resolução através do Solver permitiu obter a solução óptima:; $\boldsymbol{Q_1^* \approx 50,72}$; $\boldsymbol{Q_2^*} \approx$ **152,15;** $\boldsymbol{Q_3^*}\approx$ **87,85,** com um custo total, incluindo os custos de aquisição, $\boldsymbol{CT = 506}$ **110€**. Esta solução satisfaz obviamente a restrição. Neste caso o valor do multiplicador de Lagrange é $\boldsymbol{\lambda^* = -0,0092}$. Isto significa uma variação unitária (1€) do stock médio implica uma variação de **0,0092€** nos custos totais anuais: se o limite ao stock médio aumentar de 1€, então os custos baixam (o sinal do multiplicador é negativo) de **0,0092€**. Esta análise permite, por exemplo, comparar marginalmente o ganho de aumentar o limita do stock médio com o custo do seu financiamento adicional.

Supondo que para além desta restrição existia também uma restrição de armazenagem, limitada por uma capacidade de 250 m^2 , e em que os três produtos ocupam 0,5, 1,0 e 0,8 m^2/unidade, respectivamente.

A resolução pelo Solver indicou a mesma solução óptima, isto é, $\boldsymbol{Q_1^* \approx 50,72}$; $\boldsymbol{Q_2^*} \approx$ **152,15;** $\boldsymbol{Q_3^*}\approx$ **87,85,** sendo o multiplicador de Lagrange associado a esta segunda restrição nulo, pois a restrição não está saturada.

Antes de introduzir a segunda restrição, poderíamos verificar que a solução anterior satisfaz também a restrição de armazenagem. Com efeito:

$$\mathbf{0,5 * 50,72 + 1 * 152,15 + 0,8 * 87,85 = 247,8 < 250\ m^2}$$

Supondo, finalmente que a única restrição era ao número anual de encomendas, que não podia ultrapassar as 50.

A solução pelo Solver indica: $\boldsymbol{Q_1^* \approx 63,1}$; $\boldsymbol{Q_2^*} \approx$ **189.29;** $\boldsymbol{Q_3^*\approx 109,28}$, com um custo total de **506 232€**. Neste caso o multiplicador de Lagrange é igual a $\boldsymbol{-24,64}$. É evidente que esta solução, por ter encomendas maiores, viola as duas restrições iniciais.

10. Modelo com sincronização das encomendas

Se uma empresa tiver várias produtos para gerir, raramente acontece que as encomendas ocorram na mesma altura, devido à não coincidência nos ciclos, isto é, chegada dos produtos ao mesmo tempo. No entanto, pode ser vantajoso ajustar o ciclo de alguns produtos de modo a poderem chegar na mesma altura, reduzindo desta forma o trabalho, e os custos, associados à coordenação e recepção das encomendas. Por exemplo, podemos eventualmente reduzir o número de camiões utilizados no transporte. Roundy (1985) propôs um método relativamente simples, designado em inglês por *Power-Of-Two Ordering Policies (POTOP)*, para assegurar a sincronização das encomendas no caso de vários produtos.

Considerando $\boldsymbol{Q^* = QEE}$, sabe-se que $\boldsymbol{T^* = Q^*/D}$. Assumindo que $\boldsymbol{T}$ é pelo menos um dia (o que é normal), então para algum $\boldsymbol{m \geq 0}$, inteiro, deve verificar-se $\boldsymbol{2^m \leq T^* \leq 2^{m+1}}$. Se $\boldsymbol{T^* \leq \sqrt{2} * 2^m}$, escolhe-se uma quantidade correspondente a um intervalo (ciclo) de comprimento $\boldsymbol{2^m}$. Se $\boldsymbol{T^* \geq \sqrt{2} * 2^m}$, escolhe-se uma quantidade correspondente a um intervalo (ciclo) de comprimento $\boldsymbol{2^{m+1}}$ (no caso de igualdade é indiferente). Roundy provou que arredondando o ciclo para uma potência de **2** aumentará os custos totais, de encomenda e de stock, no máximo em **6%**, mas com a vantagem de os produtos chegarem ao mesmo tempo, com vantagens no trabalho de coordenação e gestão e eventualmente nos custos de encomenda.

Para demonstrar o resultado de Roundy, considere-se inicialmente $\boldsymbol{Q}$ uma quantidade arbitrária a encomendar, e $\boldsymbol{Q^*}$ a quantidade óptima. O custo total, excluindo o custo de aquisição, é, como se sabe, dado por

$$\boldsymbol{CT(Q) = A\frac{D}{Q} + IC\frac{Q}{2}}$$

Então

$$\boldsymbol{\frac{CT(Q)}{CT(Q^*)} = \frac{A\frac{D}{Q} + IC\frac{Q}{2}}{\sqrt{2AICD}} = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{A^2D^2}{2AICD}} + \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{(IC)^2}{2AICD}} = \frac{1}{2Q}\sqrt{\frac{2AD}{IC}} + \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{IC}{2AD}} = \frac{Q^*}{2Q} + \frac{Q}{2Q^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^*}{Q} + \frac{Q}{Q^*}\right)}$$

Como $\boldsymbol{T^* = Q^*/D}$ e $\boldsymbol{T = Q/D}$, vem

$$\frac{CT(Q)}{CT(Q^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{T^*}{T} + \frac{T}{T^*}\right) \tag{3.43}$$

Podemos então agora enunciar o teorema de Roundy.

Teorema (Roundy). Se $T^* \leq 2^m\sqrt{2}$, o custo mínimo da politica de sincronização de encomendas (*política POTOP*) *corresponde a* $T = 2^m$. Se $T^* \geq 2^m\sqrt{2}$, o custo mínimo da politica ***POTOP*** *corresponde a* $T = 2^{m+1}$. Em qualquer dos casos, o custo total com a politica de sincronização das encomendas nunca será superior a **6%** do custo total correspodente à política da QEE.

Demonstração. Como $CT(Q)$ é uma função convexa ($CT''(Q)$>0), então o intervalo (ciclo) óptimo correspondente à politica ***POTOP*** tem comprimento 2^m ou 2^{m+1}. De acordo com (3.43), 2^m será o intervalo óptimo se e só se

$$\frac{1}{2}\left(\frac{T^*}{2^m} + \frac{2^m}{T^*}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{T^*}{2^{m+1}} + \frac{2^{m+1}}{T^*}\right), \tag{3.44}$$

desigualdade que se verifica se e só se

$$\frac{T^*}{2^{m+1}} \leq \frac{2^m}{T^*}$$

Ou seja, se $T^* \leq 2^m\sqrt{2}$. Falta mostrar que se $T^* \leq 2^m\sqrt{2}$, o custo total mínimo é obtido quando $T = 2^m$. Se $T^* \geq 2^m\sqrt{2}$, o custo mínimo da política ***POTOP*** corresponde a 2^{m+1}. Este resultado mostra que a política óptima ***POTOP*** implica um ciclo no intervalo $\left[\frac{T^*}{\sqrt{2}},\ T^*\sqrt{2}\right]$.

A partir de (3.43), verifica-se que diferença máxima entre o custo total para a política ***POTOP*** e o custo total para T^* ocorrerá se o ciclo da política ***POTOP*** é $T^*\sqrt{2}$ ou $\frac{T^*}{\sqrt{2}}$. Em qualquer dos casos

$$\frac{CT\left(T^*\sqrt{2}\ \text{ou}\ \frac{T^*}{\sqrt{2}}\right)}{CT(T^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = 1{,}06$$

não podendo, portanto, os custos da política ***POTOP*** ultrapassar os **6%**, como se pretendia mostrar.

Exemplo 12. Considere-se a gestão de três produtos com as seguintes características:

	Produto 1	Produto 2	Produto 3
Procura: D_i	2 000	3 000	3 500
Custo Unitário: C_i (€)	30	40	50
C. Encomenda: A_i (€)	50	50	50
Taxa Posse: I_i	0,2	0,2	0,2

A quantidade a encomendar para cada prodtuto é $\boldsymbol{Q_1^* \approx 183}$; $\boldsymbol{Q_2^* \approx 194}$; $\boldsymbol{Q_3^* \approx 187}$, vindo então $\boldsymbol{T_1^*} = \frac{\boldsymbol{Q_1^*}}{\boldsymbol{D_1}} \approx \boldsymbol{33,3}$ dias, $\boldsymbol{T_2^*} = \frac{\boldsymbol{Q_2^*}}{\boldsymbol{D_2}} \approx \boldsymbol{23,6}$ dias, $\boldsymbol{T_3^*} = \frac{\boldsymbol{Q_3^*}}{\boldsymbol{3}} \approx \boldsymbol{19,5}$ dias. Se aplicarmos a política ***POTOP*** , vem:

Produto 1: $T_1^* = 33{,}3 \leq \sqrt{2} * (2)^5 = 45{,}3$ $\quad (T_1^* = 33{,}3 \geq \sqrt{2} * (2)^4 = 22{,}6)$, sendo então $m = 5$. deste modo o ciclo para este produto é de $(2)^5 = 32$ dias.

Produto 2: $T_2^* = 23{,}6 \leq \sqrt{2} * (2)^5 = 45{,}3$ $\quad (T_2^* = 23{,}6 \geq \sqrt{2} * (2)^4 = 22{,}6)$, sendo então $m = 5$. Deste modo o ciclo para este produto é de $(2)^5 = 32$ dias, ou seja, igual ao do produto 1.

Produto 3: $T_3^* = 19{,}5 \leq \sqrt{2} * (2)^4 = 22{,}6$ $\quad (T_3^* = 19{,}5 \geq \sqrt{2} * (2)^3 = 11{,}3)$, sendo então $m = 4$. deste modo o ciclo para este produto é de $(2)^4 = 16$ dias.

Portanto, de acordo com a política ***POTOP***, o produto 3 deve ser encomendado de 16 em 16 dias e os produtos 1 e 2 de 32 em 32 dias, com encomendas feitas simultaneamente.

11. Modelo com vários produtos provenientes do mesmo fornecedor

11.1 Modelo de Encomenda Conjunta

Quando vários produtos são provenientes do mesmo fornecedor, põe-se a questão de avaliar se não será possível uma encomenda conjunta em vez de encomendas separadas, podendo alguns produtos, por terem procura muito baixa poderem apenas ser incluídos nalgumas encomendas e não em todas. Por exemplo, os fornecedores de electrodomésticos de determinada marca fornecem muitos produtos diferentes: televisores, rádios, leitores de DVD´s, leitores de CD´s, I_pad´s, etc..

Se mantivermos as designações anteriores, com o índice $\boldsymbol{j}$ a indicar que a variável respectiva se refere ao produto $\boldsymbol{j}$**,** excluindo os custo de aquisição, por serem constantes**,** e supondo que a taxa de posse é a mesma para todos os produtos, a optimização separada indica

$$\boldsymbol{Q_j = \sqrt{\frac{2A_jD_j}{IC_j}}} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{T_j = \sqrt{\frac{2A_j}{IC_jD_j}}}\,, \qquad \boldsymbol{j = 1, 2, \dots, n}$$

sendo o custo anual para o produto $\boldsymbol{j}$ (excluindo custos de aquisição)

$$\boldsymbol{CT_j = A_j\frac{D_j}{Q_j} + IC_j\frac{Q_j}{2} = \sqrt{2A_jD_jIC_j} = \frac{A_j}{T_j} + IC_j\frac{T_jD_j}{2}}$$

Nota. Neste caso é, em geral, conveniente utilizar o Comprimento do Ciclo, $\boldsymbol{T}$, em vez da Quantidade Económica da Encomenda, $\boldsymbol{Q}$, no processo de optimização e por isso se explicita $\boldsymbol{CT_j}$ em função de $\boldsymbol{T_j}$.

Para a totalidade dos produtos, vem $\sum \boldsymbol{CT_j} = \sum \boldsymbol{\sqrt{2A_jD_jIC_j}}$. Supondo que cada encomenda custa o mesmo, isto é, $\boldsymbol{A = A_j}$, com $\boldsymbol{j = 1, 2, \dots, n}$**,** vem para encomendas separadas,

$$\sum CT_j = \sqrt{2AI}\sum\sqrt{C_jD_j} \tag{3.45}$$

Por sua vez, no caso de se proceder a uma encomenda conjunta, e explicitando o custo em função do ciclo, vem

$$CT = \frac{A}{T} + I\frac{\sum C_jD_j}{2}T$$

Minimizando em ordem a T, tem-se

$$T = \sqrt{\frac{2A}{I\sum C_jD_j}} = \sqrt{\frac{2A}{ICD}},\quad \text{fazendo}\quad CD = \sum C_jD_j$$

$$CT = \sqrt{2AI\sum C_jD_j} = \sqrt{2AI}\sqrt{\sum C_jD_j} \tag{3.46}$$

Como $\sum CT_j = \sqrt{2AI}\sum\sqrt{C_jD_j} > CT = \sqrt{2AI}\sqrt{\sum C_jD_j}$, a economia conseguida é dada por

$$\sum CT_j - CT = \sqrt{2AI}\left(\sum\sqrt{C_jD_j} - \sqrt{\sum C_jD_j}\right) \tag{3.47}$$

Exemplo 13. Considerem-se os seguintes produtos:

	Produto 1	Produto 2	Produto 3	Produto 4
Procura: D_i	1 200	1 800	2 500	3 000
Custo Unitário: C_i (€)	100	80	70	60
C. Encomenda: A_i (€)	1 000	1 000	1 000	1 000
Taxa Posse: I_i	0,20	0,20	0,20	0,20

O custo da encomenda conjunta é idêntico ao de qualquer encomenda individual.

No caso de encomendas separadas, verifica-se facilmente que

$\boldsymbol{T_1 = 0,289}$ anos; $\boldsymbol{T_2 = 0,264}$ anos; $\boldsymbol{T_3 = 0},239$ anos; $\boldsymbol{T_4 = 0,236}$ anos e $\boldsymbol{Q_1 = 346}$; $\boldsymbol{Q_2 = 474}$; $\boldsymbol{Q_3 = 598}$; $\boldsymbol{Q_4 = 707}$

$$\sum \boldsymbol{CT_j} = \sqrt{\boldsymbol{2AI}} \sum \sqrt{\boldsymbol{C_j D_j}} = \sqrt{\boldsymbol{2 * 1000 * 0,2 *}} (\sqrt{\boldsymbol{100 * 1\,200}} + \sqrt{\boldsymbol{80 * 1\,800}} + \sqrt{\boldsymbol{70 * 2\,500}} + \sqrt{\boldsymbol{60 * 3\,000}}) = \boldsymbol{31\,369€}$$

No caso de encomendas conjuntas, vem $\boldsymbol{T = 0,127}$ anos, vindo uma encomenda conjunta de $\boldsymbol{Q = 1\,080}$, com $\boldsymbol{Q_1 = 152}$; $\boldsymbol{Q_2 = 229}$; $\boldsymbol{Q_3 = 318}$; $\boldsymbol{Q_4 = 381}$.

$$\boldsymbol{CT} = \sqrt{\boldsymbol{2AI}} \sqrt{\sum \boldsymbol{C_j D_j}} = \sqrt{\boldsymbol{2 * 1000 * 0,2}} * \sqrt{\boldsymbol{100 * 1\,200 + 80 * 1\,800 + 70 * 2\,500 + 60 * 3\,000}} = \boldsymbol{15\,735€}$$

A economia conseguida anualmente é

$$\sum \boldsymbol{CT_j} - \boldsymbol{CT} = \sqrt{\boldsymbol{2AI}} \left(\sum \sqrt{\boldsymbol{C_j D_j}} - \sqrt{\sum \boldsymbol{C_j D_j}} \right) = \sqrt{\boldsymbol{2 * 1000 * 0,2}} * (\boldsymbol{1\,568,5 - 786,8}) \approx \boldsymbol{15\,634€}$$

Nota. O problema pode ser igualmente resolvido quando, com encomendas separadas, os custos das encomendas são diferentes entre si e diferentes do custo da encomenda conjunta. Neste caso trata-se de comparar $\sum \boldsymbol{CT_j} = \sqrt{\boldsymbol{2I}} \sum \sqrt{\boldsymbol{A_j D_j C_j}}$ com $\boldsymbol{CT} = \sqrt{\boldsymbol{2I}} \sqrt{\boldsymbol{A \sum C_j}}\, \boldsymbol{D_j}$.

11.2 Modelo de encomenda com custo fixo comum e custo específico a cada produto

Suponha-se que ao fazer uma encomenda conjunta existe um custo fixo, que é independente dos produtos a encomendar, $\boldsymbol{A_f}$, e um custo de passagem da encomenda referente a cada produto incluído na encomenda, que representa uma proporção do custo fixo, $\boldsymbol{k_j A_f}$, neste caso no que diz respeito ao produto $\boldsymbol{j}$. O custo total referente ao produto $\boldsymbol{j}$ é

$$\boldsymbol{CT_j = \frac{(1+k_j)A_f}{T_j} + IC_j \frac{T_j D_j}{2}}$$

cujo minimizante é

$$\boldsymbol{T_j} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2(1+k_j)A_f}}{\boldsymbol{IC_j D_j}}} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{CT_j} = \sqrt{\boldsymbol{2(1+k_j)A_f IC_j D_j}}$$

Então, o custo total com optimização separada é

$$\sum \boldsymbol{CT_j} = \sqrt{\boldsymbol{2IA_f}} \sum \sqrt{\boldsymbol{(1+k_j)C_j D_j}} \qquad (3.48)$$

Fazendo encomenda conjunta, o custo total é

$$CT = \frac{A_f}{T} + \frac{A_f \sum k_j}{T} + \frac{TI \sum \boldsymbol{C_j D_j}}{2}$$

Sendo o minimizante

$$\boldsymbol{T} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2A_f(1+\sum k_j)}}{\boldsymbol{I \sum C_j D_j}}}$$

com

$$\boldsymbol{CT} = \sqrt{\boldsymbol{2IA_f}}\sqrt{(\boldsymbol{1}+\sum \boldsymbol{k_j})\sum \boldsymbol{C_j D_j}} \qquad (3.49)$$

A economia é dada por $\sum \boldsymbol{CT_j} - \boldsymbol{CT} = \sqrt{\boldsymbol{2IA_f}}\left[\sum\sqrt{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{k_j})\boldsymbol{C_j D_j}} - \sqrt{(\boldsymbol{1}+\sum \boldsymbol{k_j})\sum \boldsymbol{C_j D_j}}\right]$

Esta situação é mais complexa que a anterior. No entanto, uma vez que os $\boldsymbol{k_j}$ são muito próximos uns dos outros, é possível fazer simplificações assumindo $\boldsymbol{k_j} = \boldsymbol{k}, \forall \boldsymbol{j}.$ Sendo assim, vem para (3.48) e (3.49), respectivamente,

$$\sum \boldsymbol{CT_j} = \sqrt{\boldsymbol{2I(1+k)A_f}}\sum\sqrt{\boldsymbol{C_j D_j}} \qquad (3.50)$$

com

$$\boldsymbol{T_j} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2(1+k)A_f}}{\boldsymbol{IC_j D_j}}}$$

e

$$\boldsymbol{CT} = \sqrt{\boldsymbol{2I(1+nk)A_f}}\sqrt{\sum \boldsymbol{C_j D_j}} \qquad (3.51)$$

com

$$\boldsymbol{T} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2A_f(1+nk)}}{\boldsymbol{I}\sum \boldsymbol{C_j D_j}}}$$

Sendo a economia dada por $\sum \boldsymbol{CT_j} - \boldsymbol{CT} = \sqrt{\boldsymbol{2IA_f}}\left[\sqrt{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{k})}\sum\sqrt{\boldsymbol{C_j D_j}} - \sqrt{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{nk})}\sqrt{\sum \boldsymbol{C_j D_j}}\right]$

Exemplo 14. Considerem-se novamente o exemplo anterior, em que $A_f = 1\,000€$ e $k = 0{,}05$.

A política com encomendas separadas seria:

$\boldsymbol{T_1 = 0,296}$ anos; $\boldsymbol{T_2 = 0,270}$ anos; $\boldsymbol{T_3 = 0},245$ anos; $\boldsymbol{T_4 = 0,242}$ anos e $\boldsymbol{Q_1 = 355}$; $\boldsymbol{Q_2 = 486}$; $\boldsymbol{Q_3 = 612}$; $\boldsymbol{Q_4 = 725.}$

$$\sum CT_j = \sqrt{2I(1+k)A_f}\sum\sqrt{C_jD_j}$$
$$= \sqrt{2*0,2*(1+0,05)*1\,000*}\left(\sqrt{100*1\,200}+\sqrt{80*1\,800}+\sqrt{70*2\,500}+\sqrt{60*3\,000}\right) = 32\,144€.$$

No caso de encomendas conjuntas, vem $\boldsymbol{T = 0,139}$ anos, vindo uma encomenda conjunta de $\boldsymbol{Q = 1\,184}$, com $\boldsymbol{Q_1 = 167}$; $\boldsymbol{Q_2 = 251}$; $\boldsymbol{Q_3 = 348}$; $\boldsymbol{Q_4 = 418.}$

$$CT = \sqrt{2I(1+nk)A_f}\sqrt{\sum C_jD_j} = \sqrt{2*0,2*(1+4*0,05)*1\,000}*\sqrt{100*1\,200+80*1\,800+70*2\,500+60*3\,000}$$
$$= 17\,237€$$

A economia conseguida anualmente é $\sum \boldsymbol{CT_j - CT =}$**14 907€.**

No exemplo anterior, o comprimento do ciclo em encomenda conjunta, $\boldsymbol{T}$, era sempre inferior ao comprimento do ciclo de qualquer produto em sistema de encomenda separada, $\boldsymbol{T_j}$**.** Isto resultou do peso em valor da procura dos diversos produtos não ser muito diferente, nenhum deles tendo um peso muito significativo. No entanto,

$\boldsymbol{T_j < T}$ se $\frac{1+k}{1+nk} < \frac{C_jD_j}{\sum C_jD_j}$**,** isto é, se o peso, em valor, da procura do produto $\boldsymbol{j}$ for significativo.. Por exemplo, se $\boldsymbol{k = 0,05}$ e $\boldsymbol{n = 10}$**,** $\boldsymbol{T_j < T}$ se o produto $\boldsymbol{j}$ tiver uma procura em valor superior a 70% do valor total de todos os produtos.

Nestes casos, o custo específico $\boldsymbol{kA_f}$ levanta duas questões relevantes na escolha da política:

1. É possível que a adopção do ciclo $\boldsymbol{T}$ para todos os produtos não minimize o custo total, logo que um artigo tenha um peso grande na procura total em valor.
2. Mesmo que $\boldsymbol{T}$ seja óptimo, pode ser possível diminuir o custo total encomendando certos produtos cuja procura é fraca, em valor, com intervalos múltiplos inteiros de $\boldsymbol{T}$.

1. Produto $\boldsymbol{l}$ com forte peso na procura final

Assuma-se que a procura do produto $\boldsymbol{l}$ é $\boldsymbol{C_l D_l = l \sum C_j D_j}$**.** A procura dos restantes produtos, designados por $\boldsymbol{B}$*,* é dada por $(1 - \boldsymbol{l}) \sum \boldsymbol{C_j D_j}$.

A optimização separada do produto $\boldsymbol{l}$ conduz a

$$\boldsymbol{T_l} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2(1+k)A_f}}{\boldsymbol{Il \sum C_j D_j}}} \text{ com } \boldsymbol{CT_l} = \sqrt{\boldsymbol{2(1+k)A_f Il \sum C_j D_j}}$$

A optimização dos restantes $(\boldsymbol{n-1})$ produtos, designados por $\boldsymbol{B}$ indica

$$\boldsymbol{T_B} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2[1+(n-1)k]A_f}}{\boldsymbol{I(1-l) \sum C_j D_j}}} \text{ com } \boldsymbol{CT_B} = \sqrt{\boldsymbol{2[1+(n-1)k](1-l)A_f I \sum C_j D_j}}$$

Sendo CT, como anteriormente, o custo total da optimização conjunta, o objectivo consiste em procurar as condições tais que

$$\boldsymbol{CT_l + CT_B < CT} \tag{3.52}$$

ou

$$\sqrt{\boldsymbol{2(1+k)A_f I l \sum C_j D_j}} + \sqrt{\boldsymbol{2[1+(n-1)k](1-l)A_f I \sum C_j D_j}} < \sqrt{\boldsymbol{2I(1+nk)A_f}}\sqrt{\boldsymbol{\sum C_j D_j}}$$

Isto é, miais simples,

$$\sqrt{\boldsymbol{(1+k)\,l}} + \sqrt{\boldsymbol{[1+(n-1)k(1-l)}} < \sqrt{\boldsymbol{1+nk}}$$

Esta expressão pode ser convertida na seguinte:

$$\boldsymbol{l^2(2+nk)\,^2 - l\left(2nk^2+4nk+4\right) + k^2 > 0}$$

inequação do segundo grau verificada quando

$$\boldsymbol{l > \frac{nk^2+2nk+2+\sqrt{(nk+1)^2+k^2(nk+1)(n-1)}}{(nk+2)^2}} \tag{3.53}$$

Por exemplo, para $\boldsymbol{k = 0{,}05}$ (em geral $\boldsymbol{k}$ é pequeno), podemos construir uma tabela para diferentes valores de $\boldsymbol{n}$ (número de produtos), obtendo-se os correspondentes valores de $\boldsymbol{l}$ que satisfazem (3.53).

Por exemplo, com $\boldsymbol{k = 0,05}$ e $\boldsymbol{n = 20}$, é correcto adoptar o ciclo da encomenda conjunta, $\boldsymbol{T}$, para todos os produtos desde que algum não ultrapasse os 90% da procura em valor. Assim, em muitos casos, a adopção do ciclo conjunto é uma boa solução.

$k = 0,05$	n	l
	3	0,9978
	4	0,9954
	5	0,9921
	10	0,9676
	20	0,8997

É possível conseguir economias arredondando o período $\boldsymbol{T_B}$ para o múltiplo inteiro mais próximo de $\boldsymbol{T_l}$, economizando-se $\boldsymbol{A_f/T_B}$. Vamos partir o conjunto dos produtos em dois subconjuntos $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$, com $\boldsymbol{A}$ a ter um peso na procura total de $\boldsymbol{a\sum C_j D_j}$, e a ser constituído por $\boldsymbol{g}$ produtos, e $\boldsymbol{B}$ a ter um peso na procura de $(1-\boldsymbol{a})\sum \boldsymbol{C_j D_j}$, sendo constituído pelos restantes $(\boldsymbol{n-g})$ produtos. Sabe-se que

$$\boldsymbol{CT_A = \frac{(1+gk)A_f}{T_A} + T_A I \frac{a\sum C_j D_j}{2}}$$

Após optimizar (minimizar), tem-se então:

$$\boldsymbol{T_A = \sqrt{\frac{2(1+gk)A_f}{Ia\sum C_j D_j}}} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{CT_A = \sqrt{2(1+gk)A_f I a \sum C_j D_j}} \qquad (3.54)$$

Por outro lado,

$$\boldsymbol{CT_B = \frac{A_f}{T_B} + \frac{(n-g)kA_f}{T_B} + T_B I \frac{(1-a)\sum C_j D_j}{2}} \qquad (3.55)$$

obtendo-se após minimização

$$T_B = \sqrt{\frac{2[1+(n-g)k]A_f}{I(1-a)\sum C_j D_j}} \quad \text{com} \quad CT_B = \sqrt{2[1+(n-g)k]A_f I(1-a)\sum C_j D_j} \tag{3.56}$$

No entanto, se como hipóteses simplificadora, minimizarmos (3.55) sem ter em conta A_f/T_B, vem para (3.56)

$$T_B = \sqrt{\frac{2(n-g)kA_f}{I(1-a)\sum C_j D_j}} \quad \text{com} \quad CT_B = \sqrt{2(n-g)kA_f I(1-a)\sum C_j D_j} \tag{3.57}$$

A condição procurada é

$$CT_A + CT_B < CT \tag{3.58}$$

ou

$$\sqrt{2(1+gk)A_f I a \sum C_j D_j} + \sqrt{2(n-g)kA_f I(1-a)\sum C_j D_j} < \sqrt{2I(1+nk)A_f}\sqrt{\sum C_j D_j}$$

ou, mais simplesmente,

$$\sqrt{a(1+gk)} + \sqrt{(1-a)(n-g)k} < \sqrt{1+nk}$$

que é satisfeita quando

$$a > \frac{1+gk}{1+nk} \tag{3.59}$$

Concluindo-se então que quando esta relação se não verificar, a opção mais económica é adoptar a política de encomenda conjunta com uma periodicidade (ciclo) $\boldsymbol{T}$.

Por outro lado, se a relação (3.59) é verificada para um certo $\boldsymbol{g}$, então $\boldsymbol{T_A}$ deve ser determinado e adoptado para o conjunto $\boldsymbol{A}$ que inclui $\boldsymbol{g}$ produtos, utilizando para o conjunto restante de produtos um múltiplo inteiro de $\boldsymbol{T_A}$ mais próximo e não o $\boldsymbol{T_B}$ da análise precedente.

2. Produto $\boldsymbol{F}$ de procura, em valor, muito fraca

Se adoptarmos para esse produto, $\boldsymbol{F}$, o ciclo $\boldsymbol{T}$, determinado para o conjunto dos produtos, o custo total associado a esse produto é:

$$\boldsymbol{CT_{F,T} = \frac{kA_f}{T} + TI\frac{C_F D_F}{2}}$$

Considerando o ciclo $\boldsymbol{2T}$, múltiplo mais próximo de

$$\boldsymbol{CT_{F,2T} = \frac{kA_f}{2T} + 2TI\frac{C_F D_F}{2}}$$

A alteração para $\boldsymbol{2T}$ é vantajosa apenas quando

$$\boldsymbol{CT_{F,T} - CT_{F,2T} = -TI\frac{C_F D_F}{2} + \frac{kA_f}{2T} > 0}$$

Ou seja, quando

$$\frac{kA_f}{C_F D_F I} > T^2 = \frac{2(1+nk)A_f}{I\sum C_j D_j}$$

Isto é, quando

$$\frac{k}{1+nk} > \frac{2C_F D_F}{\sum C_j D_j} \qquad (3.60)$$

Exemplo 15. Considere-se mais uma vez $k = 0,05$. Se $n = 20$, aplicando (3.60), verifica-se que é preciso tomar $2T$ como período entre duas encomendas consecutivas para todo o produto cuja procura em valor represente menos de 1,25% da procura total. Por exemplo, com $n = 10$, apenas produtos com peso inferior a 1,7% devem ter um ciclo de $2T$. Co 5 produtos, essa percentagem passa para 2%. Ou seja, só produtos de procura muito fraca.

Nota. De um modo geral, pode facilmente considerar-se outro múltiplo de T, para testar com o múltiplo anterior. Seja, por exemplo, mT. Neste caso é preciso considerar o menor m tal que

$$\frac{k}{(m-1)m(1+nk)} > \frac{C_F D_F}{\sum C_j D_j}$$

Mais uma vez com $k = 0,05$ e $n = 20$, verifica-se que é preciso utilizar $3T$ se $\frac{C_F D_F}{\sum C_j D_j} < 0,4\%$ e $4T$ se $\frac{C_F D_F}{\sum C_j D_j} < 0,2\%$.

12. Quando utilizar modelos da Quantidade Económica da Encomenda (QEE)

Diz-se que utilizamos modelos da QEE quando a quantidade a encomendar em cada ciclo (período) é sempre a mesma. Prova-se que quando a taxa de procura é constante no tempo, essa é a solução óptima. No entanto, em muitas situações, a procura é irregular, por diversas razões, nomeadamente sazonalidade, pelo que se essa irregularidade for significativa, o modelo $\boldsymbol{QEE}$ deixa de ser adequado.

Para verificar se a hipótese de taxa de procura constante é razoável para poder ser utilizado o modelo $\boldsymbol{QEE}$, Peterson e Silver (1985) recomendam o seguinte procedimento, considerando que a procura observada durante $\boldsymbol{n}$ períodos é $\boldsymbol{D_1, D_2, \dots, D_n}$:

1. Determinar uma estimativa para a **procura média** por período dada por

$$\boldsymbol{\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i}$$

2. Determinar uma estimativa da **variância da procura** por período dada por

$$\boldsymbol{Var(D) = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - \overline{D}^2}$$

3. Determinar uma estimativa para **coeficiente de variação** dado por

$$\boldsymbol{CV = \frac{S^2}{\overline{D}^2}}$$

Claro que se os $\boldsymbol{D_i}$ são todos iguais, então $\boldsymbol{S^2 = 0}$ (a variância de uma constante é zero), o mesmo acontecendo como $\boldsymbol{CV}$. Por isso, quando $\boldsymbol{CV}$ é pequeno, a hipótese de taxa de procura constante, utilizada nos modelos anteriores, é razoável.

.

Investigações empíricas indicam que o modelo $\boldsymbol{QEE}$ (modelo de taxa de procura constante) pode ser utilizado, com razoável aderência, quando $\boldsymbol{CV} < \mathbf{0,20}$; valores de $\boldsymbol{CV}$ acima deste montante, segundo Peterson e Silver, não recomendam o seu uso, devido à procura ser demasiado irregular.

Quando $\boldsymbol{CV} > \mathbf{0,20}$, recomenda-se a utilização de métodos de *Programação Dinâmica* ou *heurísticas* dirigidas a este tipo de comportamento, nomeadamente a *Heurística de Silver-Meal,* apresentados a seguir.

13. Modelos Determinísticos de Procura Variável

Neste caso, devido à variabilidade da procura, as quantidades a encomendar, ou a produzir, variam de período para período, podendo haver períodos em que não ocorra qualquer encomenda ou produção. Supõe-se que o planeamento do aprovisionamento se faz num horizonte temporal com $\boldsymbol{n}$ períodos, sendo $\boldsymbol{n}$ finito e com procura e custos conhecidos em cada período. Portanto, estamos a considerar um modelo de revisão periódica, que neste contexto deixa de coincidir com o modelo de Ponto de Encomenda apresentado atrás.

13.1 Modelo sem custos de Encomenda

Embora este modelo possa ser aplicado a problemas de encomendas, a sua aplicação a problemas de produção tem um maior interesse pedagógico.

Para além da não existência de custos de lançamento, ou de arranque da produção, não consideramos a possibilidade de ruptura e os custos unitários de produção são constantes em cada período, tal como os custos unitários de stocks. De uma forma mais geral, admite-se que a produção a realizar em cada período pode ocorrer em período normal e em período extra, por recurso a horas extraordinárias, por exemplo, e, naturalmente, com um custo mais elevado. Este problema pode ser abordado através da Programação Linear, e em particular como um problema de transportes. Vai assumir-se que o custo unitário em cada período é constante.

Seja:

$\boldsymbol{x_{ij}}$ – Quantidade a produzir no inicio do período $\boldsymbol{i}$ em horário normal para vender no período $\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{y_{ij}}$ – Quantidade a produzir no inicio do período $\boldsymbol{i}$ em horário extra para vender no período $\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{c_i}$ – Custo unitário em horário normal no período $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{f_i}$ – Custo unitário em horário extra no período $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{b_i}$ – Capacidade em horário normal no período $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{e_i}$ – Capacidade em horário extra no período $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{D_i}$ – Procura no período $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{h_i}$ – Custo de uma unidade em stock que passa do período $\boldsymbol{i}$ para o período $\boldsymbol{i+1}$

$\boldsymbol{i, j = 1, 2, \dots, n}$ $\boldsymbol{(n}$ períodos de planeamento da politica de stocks)

O problema consiste em conhecer a produção a realizar no inicio de cada período, a qual irá satisfazer a procura desse período e, eventualmente, de períodos seguintes. Supõe-se que o total da capacidade produtiva é suficiente para satisfazer a procura total, caso contrário haveria ruptura de stock, isto é, $\sum_{i=1}^{k}(b_i+e_i) \geq \sum_{i=1}^{k} D_i,\ \ k = 1, \dots, n$. O modelo de PL a utilizar é o seguinte:

$$Min\ \boldsymbol{CT} = \boldsymbol{c_1 x_{11} + (c_1 + h_1)x_{12} + \cdots + (c_1 + h_1 + \cdots + h_{n-1})x_{1n} + f_1 y_{11} + (f_1 + h_1)y_{12} + \cdots +}$$
$$\boldsymbol{+(f_1 + h_1 + \cdots + h_{n-1})y_{1n} + \cdots + c_{n-1}x_{n-1n-1} + (c_{n-1} + h_{n-1})x_{n-1n} + c_n x_{nn} + f_n y_{nn}}$$

s.a:

$$
\begin{gathered}
x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} \leq b_1 \\
y_{11} + y_{12} + \cdots + y_{1n} \leq e_1 \\
\ldots \\
x_{n-1n-1} + x_{n-1n} \leq b_{n-1} \\
y_{n-1n-1} + y_{n-1n} \leq e_{n-1} \\
x_{nn} \leq b_n \\
y_{nn} \leq e_n \\
x_{11} + y_{11} = D_1 \\
\ldots \\
x_{1n-1} + y_{1n-1} + \cdots + x_{n-1n-1} + y_{n-1n-1} = D_{n-1} \\
x_{1n} + y_{1n} + \cdots + x_{n-1n} + y_{n-1n} = D_n \\
x_{ij}, y_{ij} \geq 0, i, j = 1, \ldots, n
\end{gathered}
$$

Nota. As restrições de satisfação da procura, em vez de igualdades, podem assumir a forma de desigualdades do tipo (≥).

13.2 Modelo Dinâmico com custos de Encomenda

Existem duas abordagens, uma utilizando processos de optimização dinâmica (Programação Dinâmica), em geral mais complexos mas dando melhores resultados, e outra utilizando "modelos heurísticos", em geral menos precisos, mas bastante mais simples e de fácil utilização. Vejamos, ainda que de forma muito simplificada, e recorrendo a uma descrição através de exemplos, os primeiros.

Seja então:

Q_i – Quantidade a encomendar no inicio do período i, ou antes no caso de prazo de reaprovisionamento ser maior do que zero. No caso de produção, será a quantidade a produzir.

D_i – Procura no período i

S_i – Stock inicial no período i

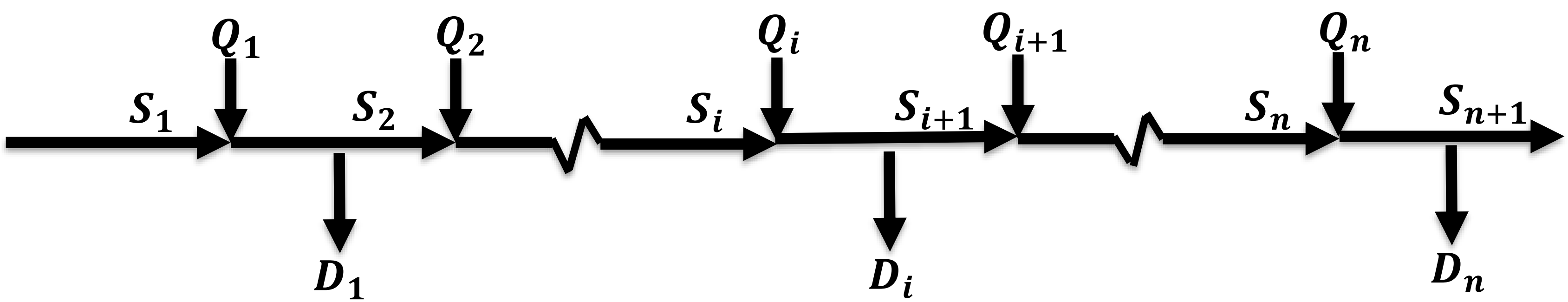
$\boldsymbol{A_i}$ – Custo (fixo) de lançamento da encomenda (ordem de produção) no período $\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{h_i}$ – Custo de uma unidade em stock que passa do período $\boldsymbol{i}$ para o período $\boldsymbol{i+1}$
$\boldsymbol{c_i(Q_i)}$ – Custo marginal de produzir ou encomendar no período
$\boldsymbol{C_i(Q_i)}$ – Custo total, de aquisição e encomenda, no período $\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n}$ ($\boldsymbol{n}$ períodos de planeamento da politica de stocks)

Nota. Prova-se que o único custo de posse de stock relevante é o que é função do stock final (Hadley e Whitin) e que, por isso, basta apenas considerar este, fazendo evidentemente o ajustamento para a dimensão do período utilizado no modelo.

Para $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n}$, o custo total, de aquisição e encomenda, em cada período é pois:

$$\boldsymbol{C_i(Q_i) = \begin{cases} 0 & para\ Q_i = 0 \\ A_i + c_i(Q_i) * Q_i & para\ \ Q_i > 0 \end{cases}}$$

em que $\boldsymbol{c_i(Q_i)}$ é o custo marginal de produção quando a quantidade no período i é $\boldsymbol{Q_i}$. Podemos visualizar através de diagrama a evolução do sistema de stocks:



em que $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_{n+1}}$, $\boldsymbol{D_1}$, $\boldsymbol{D_2}$, … , $\boldsymbol{D_n}$ são dados e as restantes são variáveis cujo valor final resulta da optimização da função de custos totais.

Algoritmo de Programação Dinâmica com função de custo geral

Como não existe ruptura de stock, a função de custos totais envolve apenas custos de aquisição, encomenda e stock, e o objectivo consiste na sua minimização no horizonte de planeamento **(**$\boldsymbol{n}$ períodos). Como o custo de stock é função do stock final em cada período, é importante explicitá-lo em cada período utilizando a seguinte identidade contabilística:

$$\boldsymbol{S_{i+1} = S_i + Q_i - D_i}$$

O problema pode ser resolvido, de forma recursiva, do inicio para o fim, ou do fim para o inicio. Utilizaremos o primeiro procedimento, que é útil na resolução do caso particular em que os custos marginais são não crescentes. A optimização será feita por etapas, obtendo-se em cada momento a trajectória óptima desde o período inicial até ao período em causa, para cada valor do stock final, que define o estado no período (etapa) $\boldsymbol{i}$, e verifica a condição, como se vê na figura anterior,

$$\boldsymbol{0 \leq S_{i+1} \leq D_{i+1} + \cdots + D_n}$$

Ou seja, em cada período, o stock final é não negativo, podendo no máximo ser suficiente para satisfazer a procura dos restantes períodos (futuros) de planeamento.

Designe-se então por $\boldsymbol{CT_i(S_{i+1})}$ a expressão geral do custo total mínimo para os períodos $\boldsymbol{1, 2, \ldots, i}$ quando o stock final no último período é $\boldsymbol{S_{i+1}}$. A *equação recursiva* é dada por:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{CT_1(S_2) = \min_{0 \leq Q_1 \leq D_1 + S_2} \{C_1(Q_1) + h_1 S_2\}} \\ \boldsymbol{CT_i(S_{i+1}) = \min_{0 \leq Q_i \leq D_i + S_{i+1}} \{C_i(Q_i) + h_i S_{i+1} + CT_{i-1}(S_{i+1} + D_i - Q_i)\}} \\ \boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n}\end{gathered} \tag{3.45}$$

Exemplo 13. (Taha) Sabendo que o stock inicial é de uma unidade e se pretende um stock nulo no fim do período três, com base nos elementos do quadro seguinte, encontrar a politica de aprovisionamento para os próximos três períodos:

Período: i	Procura: D_i	Custo Encomenda: A_i	Custo stock: h_i
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

$$c_i(Q_i) = \begin{cases} 10Q_i & 0 \le Q_i \le 3 \\ 30 + 20(Q_i - 3) & Q_i \ge 4 \end{cases}$$

Período 1: $D_1 = 3;$ $0 \le S_2 \le 2 + 4 = 6;$ $Q_1 = S_2 + D_1 - S_1 = S_2 + 2 \le 8$

				$C_1(Q_1) + h_1 S_2$						
		$Q_1 = 2$	3	4	5	6	7	8		
S_2	$h_1 S_2$	$C(Q_1) = 23$	33	53	73	93	113	133	$CT_1(S_2)$	Q_1^*
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Nota 1. como o stock inicial é igual a 1, as quantidades a encomendar variam entre 2 ((=3-1) e 8 (=2+2+4), podendo assumir qualquer valor.

Nota 2. O stock final no período 1, pode ser nulo, se se comprar apenas para satisfazer a procura do período inicial, ou assumir qualquer valor até 6, se se fizer uma encomenda para satisfazer também a procura dos restantes dois períodos (2+4=6).

Nota 3. Na terceira linha do quadro inclui os custo de aquisição e encomenda para cada quantidade encomendada. Por exemplo $C(Q_1) = 23$ indica custos de aquisição de 20=2*10 , mais os custos de encomenda de 3: 23=2*10+3. e assim sucessivamente, para as restantes quantidades.

Nota 4. Neste primeiro quadro (primeiro período**),** para cada nível de stock existe apenas uma quantidade a encomendar. Encomendar mais, implica maior stock final, encomendar menos implica menor stock final e eventual não satisfazer a procura.

Nota 5. Na coluna do custo total, $\boldsymbol{CT_1(S_2)}$, registamos o custo mínimo para cada nível de stock, que neste caso se resumo ao custo da única opção para a quantidade a encomendar. A quantidade correspondente ao custo total mínimo é registada na última coluna.

Passa-se ao segundo período, a que corresponde o segundo quadro.

Período 2: $\boldsymbol{D_2 = 2}$; $\boldsymbol{0 \le S_3 \le 4}$; $\boldsymbol{0 \le Q_2 \le D_2 + S_3 = S_3 + 2}$

		$C_2(Q_2) + h_2S_3 + CT_1(S_3 + D_2 - Q_2)$								
		$Q_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
S_3	h_2S_3	$C(Q_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$CT_2(S_3)$	Q_2^*
0	0	55	51	50					50	2
1	3	79	75	64	63				63	3
2	6	103	99	88	77	86			77	4
3	9	127	123	112	101	100	109		100	5
4	12	151	147	136	125	124	123	132	123	6

Nota 6. Reportando ao 2º quadro, neste caso as quantidades a encomendar variam entre 0 (se satisfizer a procura do período 2 com stock vindo do período anterior) e 6 (se encomendar para este período e seguintes). Já o stock final varia entre 0 e 4 (a procura dos períodos seguintes).

Nota 7. Os custos totais correspondem, para cada opção de encomenda, aos custos deste período com os correspondentes do período anterior. Assim:

- 55 = 55 + 0 corresponde à situação em que não se encomenda neste período e se pretende um stock final nulo, não havendo custos neste período, mas que implica que se tenha um stock final no período anterior de 2 unidades (a procura deste período) a que corresponde um custo de 55 no quadro anterior.

- 51 = 17 + 34 corresponde a fazer uma encomenda de uma unidade com um custo de 17 adicionado do custo do período anterior correspondente ao stock de uma unidade. Como se pretende um stock final nulo, e se faz uma encomenda de uma unidade, temos de ter um stock inicial (ou final do período anterior) de uma unidade para satisfazer uma procura de 2 unidades.

- 50 = 27 + 23 resulta de aplicar o mesmo raciocínio.

A solução para um stock final nulo é a que corresponde ao custo menor, isto é, $\boldsymbol{Q_2^* = 2,}$ com um custo de 50. Para os restantes níveis de stock final procede-se da mesma forma, devendo nestes casos considerar-se também os custos de stock. Ou seja:

- 76 = 0 + 3 + 79; 75 = 17 + 3 + 55; 64 = 27 + 3 + 34; 63 = 37 + 3 + 23
- 103 = 0 + 6 + 97; 99 = 17 + 6 + 76; 88 = 27 + 6 + 55; 77 = 37 + 6 + 34; 86 = 57 + 6 + 23
- 127 = 0 + 9 + 118; 123 = 17 + 9 + 97; 112 = 27 + 9 + 76; 101 = 37 + 9 + 55; 100 = 57 + 9 + 34; 109 = 77 + 9 + 23
- 151=0+12+ 139; 147=17+12+118; 136=27+12+97; 125=37+12+76; 124=57+12+55; 123=77+12+34; 132=97+12+23

Para cada nível de stock final escolhe-se a quantidade a que corresponde o custo total mínimo.

Passa-se ao terceiro e último período, a que corresponde o terceiro e último quadro.

Período 3: $\boldsymbol{D_3 = 4}$; $\boldsymbol{S_4 = 0}$; $\boldsymbol{Q_3 \leq D_3 + S_4 = 4}$

			$C_3(Q_3) + h_3S_4 + CT_2(S_4 + D_3 - Q_3)$					
		$Q_3 = 0$	1	2	3	4		
S_4	h_3S_4	$C(Q_3) = 0$	16	26	36	56	$CT_3(S_4)$	Q_3^*
0	0	123	116	103	99	106	99	3

A leitura da solução faz-se do fim, partido do último período, para o início. Assim, temos:

$\boldsymbol{Q_3^* = 3,}$ e o custo total é $\boldsymbol{CT_3(3) = 99}$. Através da identidade $S_4 = S_3 + Q_3 - D_3$, (Stock final é igual ao stock inicial mais a encomenda menos a procura) verifica-se que $S_3 = 0 - 3 + 4 = 1$, o que implica que o stock final do período anterior é de uma unidade e a quantidade óptima correspondente é $\boldsymbol{Q_2^* = 3}$. Utilizando a relação $S_3 = S_2 + Q_2 - D_2$, vem $S_2 = 1 - 3 + 2 = 0$, ou seja o stock final do período 1 (inicial do período 2) deve ser nulo, correspondendo-lhe um $\boldsymbol{Q_1^* = 2}$. Em síntese:

$$\boldsymbol{S_4 = 0} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Q_3^* = 3}} \Rightarrow \boldsymbol{S_3^* = 1} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Q_2^* = 3}} \Rightarrow \boldsymbol{S_2^* = 0} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Q_1^* = 2}}$$

Modelo Dinâmico com custos marginais constantes ou decrescentes

O modelo anterior torna-se bastante mais simples quando os custos marginais são constantes ou decrescentes, o que acontece frequentemente. Wagner e Whithin (W-W) provaram o seguinte resultado importante, que permite simplificar a resolução do problema dinâmico com procura variável:

1. *Dado o stock inicial* ($\boldsymbol{S_1 = 0}$)*, é solução óptima satisfazer a procura em qualquer período, ou com nova produção (encomenda) ou com o stock existente, mas nunca a partir de ambos, isto é,* $\boldsymbol{Q_i S_i = 0}$*. No caso em que o stock inicial é superior a zero, este montante (do stock) pode ser deduzido da procura do período seguinte, ou dos períodos seguintes, no caso do stock ser superior à procura do primeiro período, deduzindo sucessivamente da procura seguinte, se esse for o caso.*
2. *A quantidade óptima para o período* $\boldsymbol{i}$*,* $\boldsymbol{Q_i}$*, deve ser zero ou satisfazer exactamente a procura desse período ou mais períodos seguintes (sucessivos).*

Exemplo 14. Um subempreiteiro fabricante de material aeronáutico comprometeu-se a entregar no início de cada um dos meses indicados abaixo uma determinada componente para aviões. Esta componente é fabricada por lotes e o custo de lançamento da produção é de 300 €. O valor unitário de cada componente é de 120 €. O subempreiteiro utiliza uma taxa de posse, $I = 0{,}20$.

As componentes necessárias (procura) em cada mês são entregues no fim do mês anterior e devem ser produzidas no(s) mês(es) anterior(es). Quando um produto fica em stock de um mês para o seguinte tem o respectivo custo de posse. O plano de entregas é o seguinte:

Meses	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Procura	80	100	125	100	50

Como a taxa de posse anual é 20%, o custo de posse mensal é $\boldsymbol{h=0,20}$ *∗**120/12=2.*** Pretende determinar-se o plano de produção, e respectivo o custo total envolvido.

Período 1: $\mathbf{D_1=80}$

				$C_1(Q_1)+hS_2$				
		$Q_1=$	80	180	305	405	455		
S_2	hS_2	$C_1(Q_1)=$	9 900	21 900	36 900	48 900	54 900	$CT_1(S_2)$	Q_1^*
0	0		9 900					9 900	80
100	200			22 100				22 100	180
225	450				37 350			37 350	305
325	650					49 550		49 550	405
375	750						55 650	55 650	455

Nota. Como o stock inicial é nulo e a procura no primeiro período é 80, a quantidade a encomendar terá de ser pelo menos 80. As alternativas resultam de incluir sucessivos períodos, tal como o stock final pode ser nulo ou as procuras seguintes.

Período 2: $D_2 = 100$

			$C_2(Q_2) + hS_3 + CT_1(S_3 + D_2 - Q_2)$						
		$Q_2 =$	0	100	225	325	375		
S_3	hS_3	$C_2(Q_2) =$	0	12 300	27 300	39 300	45 300	$CT_2(S_3)$	Q_2^*
0	0		22 100	22 200				22100	0
125	250		37 600	(*)	37 450			37 450	225
225	450		50 000	(*)	(*)	49 650		49 650	325
275	550		56 200	(*)	(*)	(*)	55 750	55 750	375

(*) $Q_i * S_i = 0$, devido às condições do teorema de W-W. não pode haver stock inicial e encomenda no mesmo período, excepto no primeiro período.

Período 3: $D_3 = 125$

			$C_3(Q_3) + hS_4 + CT_2(S_4 + D_3 - Q_3)$					
		Q_3	0	125	225	275		
S_4	hS_4	$C_3(Q_3)$	0	15 300	27 300	33 300	$CT_3(S_4)$	Q_3^*
0	0		37 450	37 400			37 400	125
100	200		49 850	(*)	49 600		49 600	225
150	300		56 050	(*)	(*)	55 700	55 700	275

(*) Idem

Período 4: $\boldsymbol{D_4 = 100}$

		$\boldsymbol{C_4(Q_4) + hS_5 + CT_3(S_5 + D_4 - Q_4)}$						
		$\boldsymbol{Q_4}$	0	100	150			
$\boldsymbol{S_5}$	$\boldsymbol{hS_5}$	$\boldsymbol{C_4(Q_4)}$	0	12 300	18 300	$\boldsymbol{CT_4(S_5)}$	$\boldsymbol{Q_4^*}$	$\boldsymbol{Q_4^*}$ ***Alt***
0	0		49 600	49 700		49 600	0	
50	100		55 800	(*)	55 800	55 800	0	150

(*) Idem

Período 5: $\boldsymbol{D_5 = 50}$

		$\boldsymbol{C_5(Q_5) + hS_6 + CT_4(S_6 + D_5 - Q_5)}$				
		$\boldsymbol{Q_5}$	0	50		
$\boldsymbol{S_6}$	$\boldsymbol{hS_6}$	$\boldsymbol{C_5(Q_5)}$	0	6 300	$\boldsymbol{CT_5(S_6)}$	$\boldsymbol{Q_5^*}$
0	0		55 800	55 900	55 800	0

Resta agora a leitura da solução, partindo do fim para o início: $\boldsymbol{S_6 = 0} \Rightarrow \boldsymbol{Q_5^* = 0} \Rightarrow \boldsymbol{S_5^* = 50\ (S_6 - Q_5^* + D_5)} \Rightarrow \boldsymbol{Q_4^* = 0} \Rightarrow \boldsymbol{S_4^* = 150\ (S_5^* - Q_4^* + D_4)} \Rightarrow \boldsymbol{Q_3^* = 275} \Rightarrow \boldsymbol{S_3^* = 0\ (S_4^* - Q_3^* + D_3)} \Rightarrow \boldsymbol{Q_2^* = 0} \Rightarrow \boldsymbol{S_2^* = 100\ \ (S_3^* - Q_2^* + D_2)} \Rightarrow \boldsymbol{Q_1^* = 180.}$

Como que $\boldsymbol{Q_4^*}$ pode ser **0** ou **150** (na solução anterior consideramos $\boldsymbol{Q_4^* = 0}$), existe solução alternativa. Esta obtém-se considerando $\boldsymbol{Q_4^* = 150}$ e prosseguindo como anteriormente, isto é, $\boldsymbol{Q_4^* = 150} \Rightarrow \boldsymbol{S_4^* = 0\ (S_5^* - Q_4^* + D_4)} \Rightarrow \boldsymbol{Q_3^* = 125} \Rightarrow \boldsymbol{S_3^* = 0\ (S_4^* - Q_3^* + D_3)} \Rightarrow \boldsymbol{Q_2^* = 0} \Rightarrow \boldsymbol{S_2^* = 100\ \ (S_3^* - Q_2^* + D_2)} \Rightarrow \boldsymbol{Q_1^* = 180.}$

Em síntese: $\boldsymbol{Q_1^* = 180}$, $\boldsymbol{Q_2^* = 0}$, $\boldsymbol{Q_3^* = 275}$, $\boldsymbol{Q_4^* = 0}$ e $\boldsymbol{Q_5^* = 0}$ ou $\boldsymbol{Q_1^* = 180}$, $\boldsymbol{Q_2^* = 0}$, $\boldsymbol{Q_3^* = 125}$, $\boldsymbol{Q_4^* = 150}$ e $\boldsymbol{Q_5^* = 0}$, com um custo total de $\boldsymbol{CT_5(S_6) = 55\,800}$. O problema tem, pois, solução óptima alternativa.

Nota 1. Como o custo unitário de aquisição é constante e idêntico para todos os períodos, o problema poderia ter sido resolvido sem a sua consideração explícita. Se esse fosse o caso, bastava somar no fim os custos totais de aquisição para a totalidade da procura. Quando o custo unitário é constante, é de facto assim que se procede, pois lida-se com valores mais pequenos, sem afectar o resultado final.

Nota 2. Neste exemplo, atendendo á natureza dos custos, o algoritmo W-W pode ainda ser mais simplificado. Como o custo de encomenda é constante e igual a € 300 e o custo unitário de stock no período é € 2, verifica-se que nunca deverão ser considerados stocks superiores a 150 unidades, pois neste caso é preferível gastar o custo de encomenda (note-se que o custo unitário neste exemplo é constante). Por outro lado, se o stock final de cada período não pode ser superior a 150, o montante a encomendar não pode ser superior à procura no período mais 150 de stock. Portanto, na análise em cada período, não vale a pena considerar stocks superiores a 150 unidades, nem encomendas que impliquem stocks superiores a este montante, o que diminui as alternativas de escolha, simplificando o problema. Tendo em conta também a nota anterior, vem então:

Período 1: $\mathbf{D_1 = 80}$

			$\boldsymbol{C_1(Q_1) + hS_2}$			
		$\boldsymbol{Q_1 =}$	80	180		
$\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{hS_2}$	$\boldsymbol{C_1(Q_1) =}$	300	300	$\boldsymbol{CT_1(S_2)}$	Q_1^*
0	0		300		300	80
100	200			500	500	180

Período 2: $\mathbf{D_2 = 100}$

		$\boldsymbol{C_2(Q_2) + hS_3 + CT_1(S_3 + D_2 - Q_2)}$					
		$\boldsymbol{Q_2}$	0	100	225		
$\boldsymbol{S_3}$	$\boldsymbol{hS_3}$	$\boldsymbol{C_2(Q_2) =}$	0	300	300	$\boldsymbol{CT_2(S_2)}$	$\boldsymbol{Q_2^*}$
0	0		500	600		500	0
125	250				850	850	225

Período 3: $D_3 = 125$

		$C_3(Q_3) + hS_4 + CT_2(S_4 + D_3 - Q_3)$						
		Q_3	0	125	225	275		
S_4	hS_4	$C_3(Q_3)$	0	300	300	300	$CT_3(S_4)$	Q_3^*
0	0		850	800			800	125
100	200				1 000		1 000	225
150	300					1 100	1 100	275

Período 4: $D_4 = 100$

		$C_4(Q_4) + hS_5 + CT_3(S_5 + D_4 - Q_4)$						
		Q_4	0	100	150			
S_5	hS_5	$C_4(Q_4)$	0	300	300	$CT_4(S_5)$	Q_4^*	Q_4^* *Alt*
0	0		1 000	1 100		1 000	0	
50	100		1 200		1 200	1 200	0	150

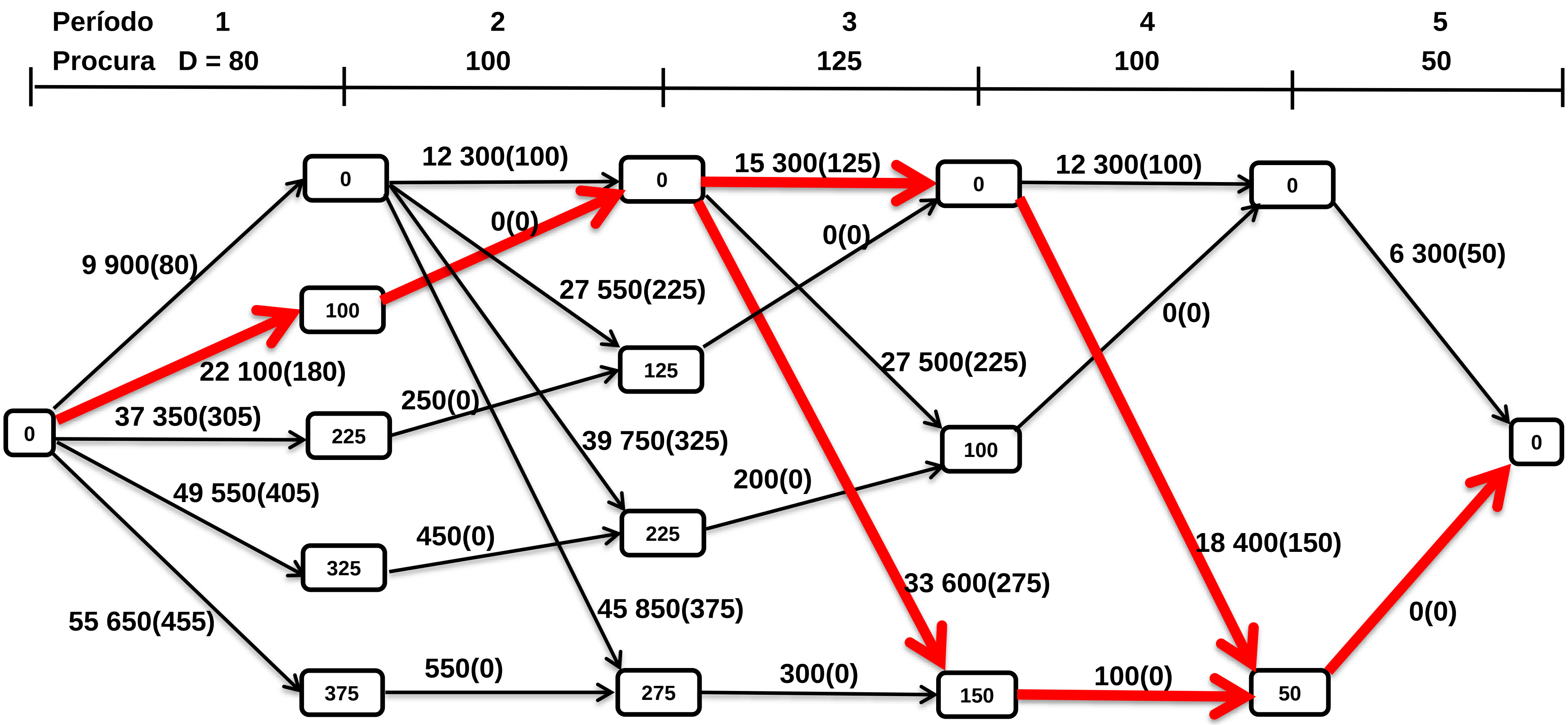
Período 5: $D_5 = 50$

	$C_5(Q_5) + hS_6 + CT_4(S_6 + D_5 - Q_5)$					
		Q_5	0	50		
S_6	hS_6	$C_5(Q_5)$	0	300	$CT_5(S_6)$	Q_5^*
0	0		1 200	1 300	1 200	0

A solução é, obviamente, a mesma, e os três últimos quadros também são idênticos, excepto em que excluem os custos de aquisição, mas os dois primeiros vieram simplificados. Se adicionarmos os custos de aquisição, obtém-se o custo total obtido na aplicação anterior: $\boldsymbol{Custo\ total} = € \mathbf{120} * \mathbf{455} + € \mathbf{1200} = € \mathbf{55\,600}$.

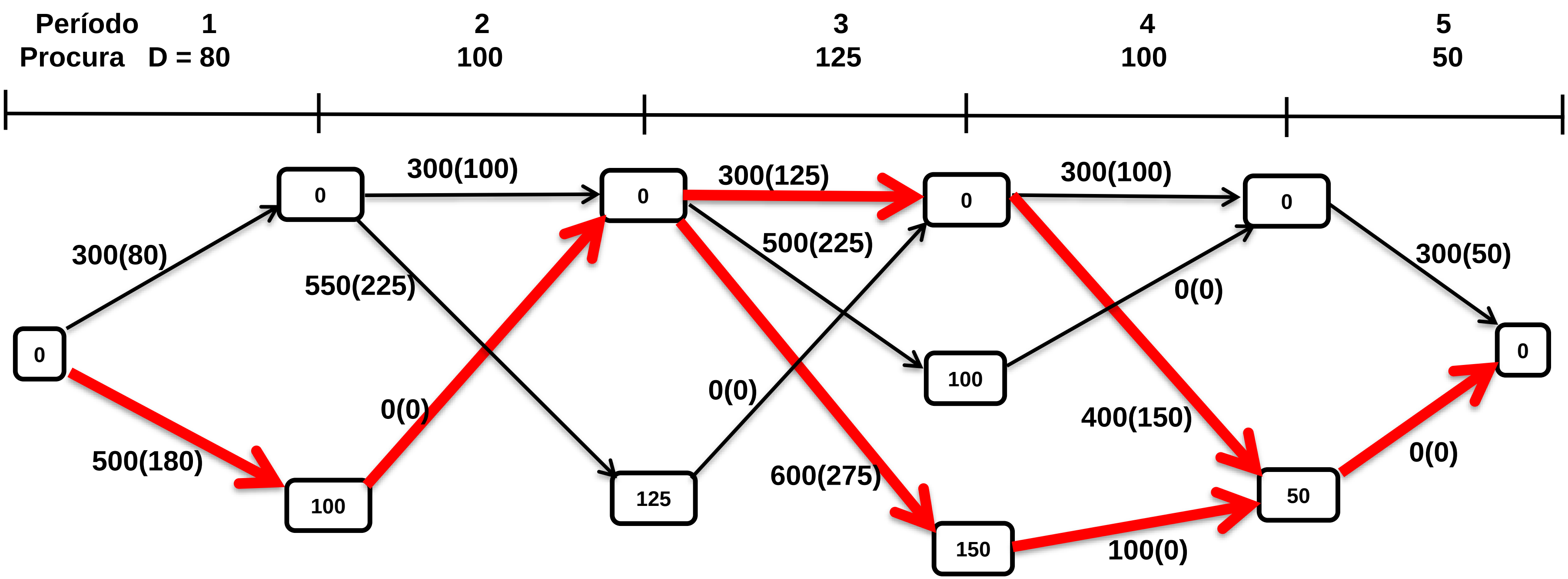
Volta repetir-se que algumas destas simplificações adicionais resultam das particularidades do exemplo.

Apresentação em rede



A solução óptima corresponde ao caminho mais curto entre o nodo inicial e o nodo final. Para maior facilidade de interpretação, os elementos dentro dos nodos correspondem ao stock existente, e não ao número do nodo, os elementos nos arcos correspondem aos custos no período e os elementos entre parênteses à quantidade encomendada para o período.

Se excluirmos os custos de aquisição, pelo facto de os unitários serem constantes e tendo em conta as simplificações referidas na segunda aplicação do exemplo, em que se eliminam alternativas de encomenda e stock não verificáveis na solução óptima, teremos então a seguinte rede equivalente, bem mais "leve", incluindo apenas os custos de encomenda e de stock:



Os valores inscritos nos arcos e nos nodos têm a mesma interpretação que a dada na rede anterior com os custos totais. Os comentários são naturalmente os mesmos. A determinação do caminho mais curto, através por exemplo da aplicação do algoritmo de Dijkstra, indica os dois caminhos a vermelho, que permitem ler a política óptima, neste caso duas políticas óptimas alternativas. Verifica-se, através da rede, que a hipótese subjacente ao teorema de Wagner-Whitin permite eliminar muitas alternativas, facilitando a obtenção da solução.

13.3 Heurística de Silver-Meal

Esta heurística é válida para situações em que o custo unitário é constante e idêntico para todos os períodos e, por isso, esse custo vai ser omitido na sua descrição. No fim pode ser somado para obter o custo total, a juntar aos custos de encomenda e aos custos de stock.

Suponha-se que no período $\boldsymbol{i}$ se produz, ou encomenda, para os períodos $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{t},$ em que $\boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{t}.$ Seja $\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t})$ o custo de lançamento mais o custo de posse de stock para os períodos $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{t}.$ Então:

$$\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}) = \begin{cases} \boldsymbol{A_i} & \boldsymbol{t} = \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{A_i} + \boldsymbol{h_i D_{i+1}} + (\boldsymbol{h_i} + \boldsymbol{h_{i+1}})\boldsymbol{D_{i+2}} + \cdots + (\sum_{k=i}^{t-1} \boldsymbol{h_k})\boldsymbol{D_t} & \boldsymbol{t} > \boldsymbol{i} \end{cases} \qquad (3.46)$$

Considere-se agora o custo unitário por período, $\boldsymbol{CTU}((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{t}-\boldsymbol{i}+\mathbf{1}}$, cujo valor se pretende mínimo, determinando-se $\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{t}$ óptimo). Resolução de forma recursiva:

$$\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{A_i}$$

$$\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{CT}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}-\mathbf{1}) + (\sum_{K=i}^{t-1} \boldsymbol{h_k})\boldsymbol{D_t} \qquad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{i}+\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{n} \qquad (3.47)$$

Passo 1. Seja $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}$.

Passo 2. Determinar o mínimo local que satisfaz

$$\boldsymbol{CTU}((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}^* - \mathbf{1}) \geq \boldsymbol{CTU}((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}^*)$$
$$\boldsymbol{CTU}((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}^* + \mathbf{1}) \geq \boldsymbol{CTU}((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}^*)$$

Se estas condições são satisfeitas, então encomenda-se em $\boldsymbol{i}$ as quantidades $(\boldsymbol{D_i} + \boldsymbol{D_{i+1}} + \cdots + \boldsymbol{D_{t^*}})$ para os períodos $i, i+1, \ldots t^*$.

Passo 3. Faça-se $\boldsymbol{i = t^* + 1}$. Se $\boldsymbol{i > n}$, parar, pois todo o período de planeamento foi coberto. Caso contrário, voltar ao passo 1.

Exemplo 15. Considere-se um exemplo com os seguintes dados, em que o custo unitário do produto é 50 u.m..

Período i	Procura D_i	C. Lanç. A_i	C. Stock h_i
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

Iteracção 1. Seja $\boldsymbol{i=1}$, $\boldsymbol{A_1=20}$, $\boldsymbol{CT((1,1)=20}$, $\boldsymbol{CT((1,2)=CT((1,1)+h_1D_2=20+1*15=35}$, $\boldsymbol{CTU((1,3)=CT((1,2)+(h_1+h_2)D_3=35+(1+1)*7=49}$, $\boldsymbol{CTU((1,4)=CT((1,3)+(h_1+h_2+h_3)D_4=49+(1+1+1)*20=109}$,

Período $\boldsymbol{i}$	Procura $\boldsymbol{D_i}$	$\boldsymbol{CT((1,t)}$	$\boldsymbol{CTU((1,t)}$
1	10	20	20
2	15	35	17,5
3	7	49	**16,33** (min)
4	20	109	27,25

O mínimo local é obtido em $\boldsymbol{t^*=3}$, sendo o montante a produzir ou encomendar em 1, $\boldsymbol{Q_1^*=D_1+D_2+D_3=32}$, para os períodos $1,2,3$. Fixa-se a seguir $\boldsymbol{i=t^*+1=4}$.

Iteracção 2. Seja $\boldsymbol{i=4}$, $\boldsymbol{A_4=18}$, $\boldsymbol{CT((4,4)=18}$, $\boldsymbol{CT((4,5)=CT((4,4)+h_4D_5=18+3*13=57}$,

Período $\boldsymbol{i}$	Procura $\boldsymbol{D_i}$	$\boldsymbol{CT((4,t)}$	$\boldsymbol{CTU((4,t)}$
4	20	18	**18** (min)
5	13	57	28,5

O mínimo local é obtido em $\boldsymbol{t^*=4}$, sendo o montante a produzir ou encomendar em 4, $\boldsymbol{Q_4^*=D_4=20}$, para o período 4. Fixa-se a seguir $\boldsymbol{i=t^*+1=5}$.

Iteracção 3. Seja $\boldsymbol{i} = \mathbf{5}$, $\boldsymbol{A_5} = \mathbf{5}, \boldsymbol{CT}((\mathbf{5}, \mathbf{5}) = \mathbf{5}, \boldsymbol{CT}((\mathbf{5}, \mathbf{6}) = \boldsymbol{CT}((\mathbf{5}, \mathbf{5}) + \boldsymbol{h_5 D_6} = \mathbf{5} + \mathbf{1} * \mathbf{25} = \mathbf{30}$,

Período i	Procura D_i	$CT((5,t)$	$CTU((5,t)$
5	13	5	**5** (min)
6	25	30	15

O mínimo local é obtido em $\boldsymbol{t}^* = \mathbf{5}$, sendo o montante a produzir ou encomendar em $\mathbf{5}, \boldsymbol{Q_5^*} = \boldsymbol{D_5} = \mathbf{13}$, para o período 5. Fixa-se a seguir $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{t}^* + \mathbf{1} = \mathbf{6}$, mas como é o último período, neste devemos encomendar $\boldsymbol{Q_6^*} = \boldsymbol{D_6} = \mathbf{25}$, para o período 6, ficando assim o problema resolvido. Em síntese:

$\boldsymbol{Q_1^*} = \mathbf{32}$, $\boldsymbol{Q_4^*} = \mathbf{20}, \boldsymbol{Q_5^*} = \mathbf{13}, \boldsymbol{Q_6^*} = \mathbf{25}$, com $\boldsymbol{Q_2^*} = \boldsymbol{Q_3^*} = \mathbf{0}$. O custo total $\boldsymbol{CT}((\mathbf{1}, \mathbf{6}) = \boldsymbol{CT}((\mathbf{1}, \mathbf{3}) + \boldsymbol{CT}((\mathbf{4}, \mathbf{4}) + \boldsymbol{CT}((\mathbf{5}, \mathbf{5}) + \boldsymbol{CT}((\mathbf{6}, \mathbf{6}) = \mathbf{49} + \mathbf{18} + \mathbf{5} + \mathbf{30} = \mathbf{122}$. Se quisermos incluir o custo de aquisição, então o custo total é 4 622.

Resolvemos este mesmo problema pelo algoritmo W-W, obtendo a seguinte comparação de resultados entre os dois métodos, sem os custos de aquisição, que são iguais nos dois casos e irrelevantes na optimização:

Período i	Encom. Q_i S-M	Custo Total Acumul. S-M	Encom. Q_i W-W	Custo total Acumul. W-W
1	**32**	**49**	**10**	**20**
2	**0**	**49**	**22**	**44**
3	**0**	**49**	**0**	**44**
4	**20**	**67**	**20**	**62**
5	**13**	**72**	**38**	**92**
6	**25**	**122**	**0**	**92**

Nota 1. A *Heurística de Silver-Meal* garante apenas um mínimo local. No entanto, na maior parte dos casos práticos a melhoria que se consegue procurando o mínimo global através da programação dinâmica é pequena, justificando a sua grande utilidade.

Nota 2. Há duas situações em que esta heurística não funciona muito bem: (i) quando a procura desce muito rapidamente em vários períodos; (ii) quando ocorrem muitos períodos com procura nula.

13.4 Outros Métodos de Gestão de Stocks de Procura Variável

Existem outros métodos e heurísticas para problemas de stocks de procura variável, alguns deles bastante simples mesmo, embora a heurística de Silver-Meal seja a mais generalizada e, na nossa opinião, a mais interessante. Apresentemo-los de seguida.

Método do Lote por Lote

Este método é muito simples e intuitivo, mas pouco eficiente. De acordo com este método, *a política consiste em encomendar a quantidade necessária para cada período.* A sua utilidade verifica-se quando se trata de produtos muito caros e com custos de lançamento relativamente baixos e pouco exigentes em termos administrativos. Neste caso, fazer uma encomenda é fácil e barato, enquanto os custos de imobilização do capital em stock são elevados.

Método da Quantidade Periódica da Encomenda

Este método baseia-se na fórmula de Wilson, só que considera a procura média por período em vez da procura constante dos modelos contínuos.

Em vez da $\boldsymbol{QEE}$, calcula-se o *Intervalo Económico da Encomenda* ($\boldsymbol{IEE}$) e arredonda-se ao intervalo mais próximo maior do que zero, de modo que as encomendas sejam suficientes para um número inteiro de períodos. Considerando as designações anteriores, e designando a procura média por período por $\overline{\boldsymbol{D}}$, vem

$$\boldsymbol{IEE} = \frac{\boldsymbol{QEE}}{\overline{\boldsymbol{D}}} = \frac{\sqrt{\frac{2A\overline{D}}{h}}}{\overline{\boldsymbol{D}}} = \sqrt{\frac{2A}{h\overline{D}}} \qquad (3,48)$$

cujo valor é arredondado.

O tamanho dos lotes é simplesmente a soma da procura dos períodos dados pelo arredondamento do $\boldsymbol{IEE}$.

Nota. Se num período a procura é nula, a encomenda avança para o próximo período com procura positiva.

Algoritmo do Part-Período

Esta heurística selecciona o número de períodos a serem cobertos pela encomenda tal que os custos de posse de stock igualem os custos de encomenda.

Dada a natureza discreta da procura, os custos de posse de stock e os custos de encomenda não são em geral iguais, pelo que o tamanho da encomenda vai aumentando até que os custos de posse sejam não superiores ao custo da encomenda. Deste modo, pretende determinar-se $\boldsymbol{T}$ tal que

$$\boldsymbol{h}\sum_1^T(\boldsymbol{i}-\mathbf{1})\boldsymbol{D_i} = \boldsymbol{A} \qquad \text{ou} \qquad \sum_1^T(\boldsymbol{i}-\mathbf{1})\boldsymbol{D_i} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{h}}$$

sendo o *Part-Período Económico,* $\boldsymbol{PPE} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{h}}$ *e* $\sum_1^T(\boldsymbol{i}-\mathbf{1})\boldsymbol{D_i} = \boldsymbol{PPA}$ os *Part-Períodos Acumulados.* Conhecido $\boldsymbol{T}$, determina-se facilmente $\boldsymbol{Q}$ através da relação $\boldsymbol{Q} = \sum_1^T\boldsymbol{D_i}$.

Nota. Existe ainda a possibilidade de melhorar a performance do *Part-Período* quando ocorrem grandes variações da procura à volta do período envolvido na encomenda (períodos de procura grande sucedem-se a períodos de procura pequena, por exemplo). Nestes casos faz-se o chamado teste de "Avançar" ou "Recuar". Uma condição necessária para avançar um período é dada por $\boldsymbol{D_{T+2} > TD_{T+1}}$. Uma condição necessária para recuar um período é dada por $\boldsymbol{D_T > 2D_{T+1}}$. Embora estes testes sejam falíveis, em geral melhoram os resultados da heurística quando a procura varia acentuadamente.

Algoritmo do Part-Período Incremental ($\boldsymbol{PPI}$)

Com esta heurística pretende determinar-se o tamanho do lote que inclua a procura de um número inteiro de períodos tal que

$$\boldsymbol{h(T-1)D_T = A} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{(T-1)D_T = \frac{A}{h}}$$

designando $\boldsymbol{(T-1)D_T}$ por *Part-Período Incremental ($\boldsymbol{PPI}$).*

Assim, o tamanho do lote é sucessivamente aumentado pelas necessidades dos períodos seguintes até que o $\boldsymbol{PPI}$ exceda o $\boldsymbol{PPE}$.

A 1ª encomenda é feita no 1º período com procura positiva. A encomenda seguinte é planeada para o 1º período em que o $\boldsymbol{PPI}$ excede o $\boldsymbol{PPE}$, e assim sucessivamente.

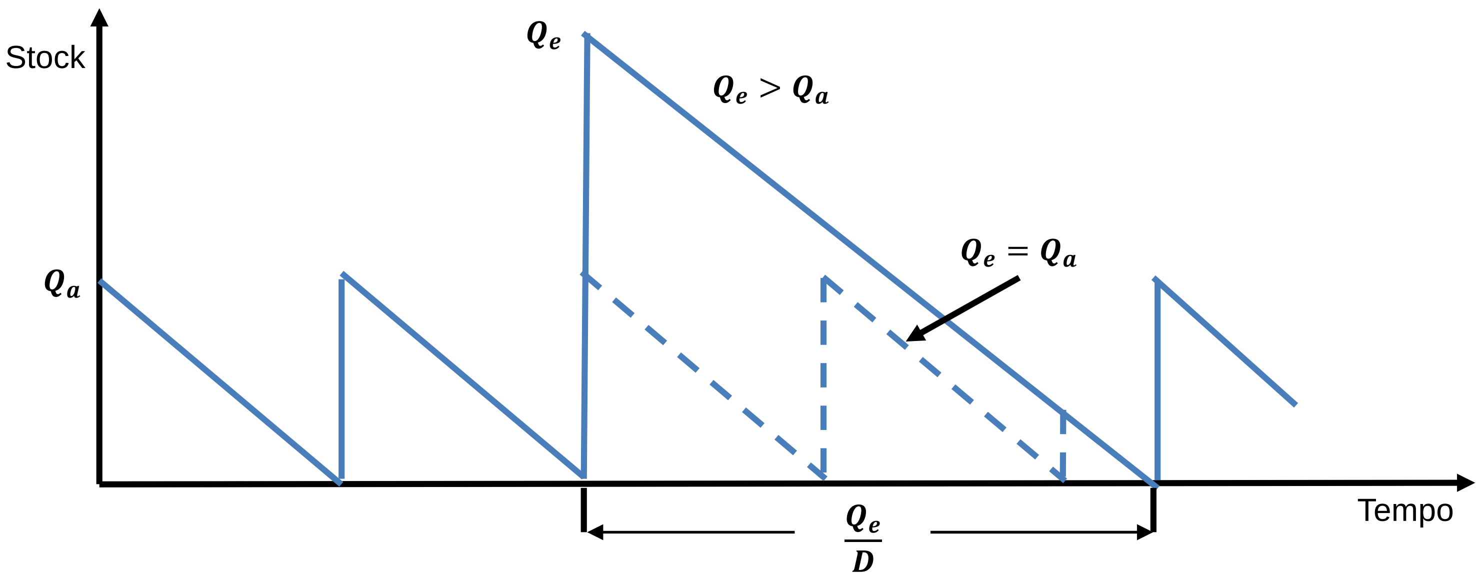
14. Modelos com Encomendas Especiais

Neste ponto pretendemos analisar situações especiais decorrentes de alterações especiais no preço de aquisição do produto, seja pela existência de um desconto especial (pontual) no momento de reaprovisionar, seja por uma aumento do preço que justifique a existência de uma encomenda especial, enquanto o preço anterior se mantém, antes de o sistema retornar ao seu ponto de equilíbrio.

14.1 Desconto Especial no Momento de Reaprovisionar

Com este caso pretende analisar-se a situação em que o fornecedor fornece um desconto especial, $\Delta\boldsymbol{C}$, temporário, passando o preço de aquisição a ser $\boldsymbol{C} - \Delta\boldsymbol{C}$.

Designando por $\boldsymbol{Q_e}$ o montante da *Encomenda Especial* e por $\boldsymbol{Q_a}$ a quantidade a encomendar resultante da política em vigor até então, tem-se a seguinte representação gráfica:



Sendo $\boldsymbol{CT_a}$ o custo total no período $\frac{Q_e}{D}$ associado á política actual, isto é, sem encomenda especial, e $\boldsymbol{CT_e}$ o custo total no mesmo período associado à encomenda especial, o problema consiste em determinar o montante da Encomenda Especial, $\boldsymbol{Q_e}$, de modo a maximizar $\{\boldsymbol{CT_a - CT_e}\}$.

$$CT_a = (C - \Delta C)Q_a + C(Q_e - Q_a) + \frac{Q_a}{2} I(C - C\Delta)\frac{Q_a}{D} + \frac{Q_a}{2} IC\frac{(Q_e - Q_a)}{D} + A\frac{Q_e}{Q_a} =$$

$$= CQ_e - \Delta CQ_a + \frac{I(C-C\Delta)}{2D} Q_a^2 + \frac{ICQ_aQ_e}{2D} - \frac{IC}{2D} Q_a^2 + A\frac{Q_e}{Q_a} \qquad (3.49)$$

Por sua vez,

$$CT_e = (C - \Delta C)Q_e + \frac{Q_e}{2} I(C - C\Delta)\frac{Q_e}{D} + A = (C - \Delta C)Q_e + \frac{I(C-C\Delta)}{2D} Q_e^2 + A \qquad (3.50)$$

Consequentemente, após simplificações e atendendo a que $\boldsymbol{Q_a^2} = \frac{2AD}{IC}$, a economia média no período $\frac{Q_e}{D}$ é então

$$E = CT_a - CT_e = \Delta CQ_e - \Delta CQ_a - \frac{I\Delta C}{2D} Q_a^2 + 2A\frac{Q_e}{Q_a} - \frac{I(C-C\Delta)}{2D} Q_e^2 - A \qquad (3.51)$$

A maximização de (3.51) em ordem a Q_e conduz a

$$Q_e^* = \frac{\Delta CD}{I(C-C\Delta)} + \frac{CQ_a}{(C-\Delta C)} \qquad (3.52)$$

que indica o montante óptimo da encomenda especial. O benefício obtido com a encomenda especial é

$$E^* = A\frac{C-\Delta C}{C}[(\frac{Q_e^*}{Q_a})^2 - 1] \qquad (3.53)$$

.

Exemplo 16. Uma empresa importa um produto químico pelo preço (preço CIF – Cost, Insurance and Freight) de 110 €/ton. A procura anual do produto é de 12 000 tons, o custo de cada encomenda de 10 000 € e a taxa de posse de 20% ao ano. O prazo de reaprovisionamento é de 15 dias. A empresa está prestes a tingir o ponto de encomenda e soube que o fornecedor está neste momento a entregar o produto no cliente por 90 €/ton se a encomenda for efectuada nos próximos dias. Pelas condições fornecidas, sabe-se que o desconto permanece válido na data de reaprovisionar. A empresa estuda a hipótese de fazer uma encomenda especial para beneficiar do desconto.

$\boldsymbol{D = 12\,000\ tons;\ C = 110}$ €.; $\boldsymbol{C - C\Delta = 90}$ €.; $\boldsymbol{I = 0,2;\ IC = 0,2 * 110 = 22}$ €; $\boldsymbol{C\Delta = 20}$ €; $\boldsymbol{I(C - C\Delta) = 0,2 * 90 = 18}$ €;

$\boldsymbol{A = 10\,000}$ €;

$$\boldsymbol{Q_a} = \sqrt{\frac{2*10\,000*12\,000}{0{,}2*110}} \approx 3\,303 \text{ tons}; \quad \boldsymbol{Q_e^*} = \frac{\Delta CD}{I(C-C\Delta)} + \frac{CQ_a}{(C-\Delta C)} = \frac{20*12\,000}{18} + \frac{110*3\,303}{90} \approx \boldsymbol{17\,370\ tons}$$

A economia conseguida é:

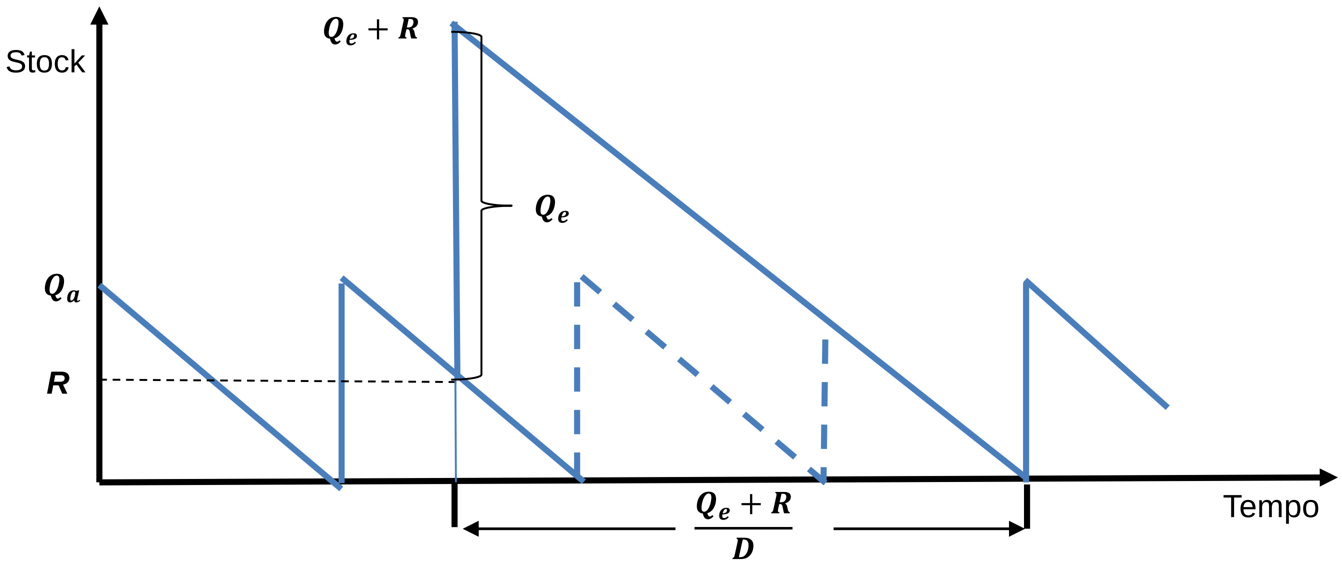
$$\boldsymbol{E^* \approx 148\,417} \text{ €}$$

Note-se que se este novo preço, de 90 €/ton, vigorasse indefinidamente, a nova $\boldsymbol{QEE}$ de equilíbrio, para o futuro, seria de cerca de 3 651 tons, resultante da aplicação do modelo de Wilson com o novo preço. Nesse caso não haveria encomenda especial, mas apenas um ajustamento na $\boldsymbol{QEE}$, que passaria a ser de 3 651 tons.

14.2 Desconto Especial Expira Antes de Reaprovisionar

Esta situação é relativamente semelhante à anterior, com a diferença de a encomenda especial, para beneficiar do desconto especial, ter de ser efectuada antes de expirar o respectivo prazo de validade, que ocorre antes da data de reaprovisionamento normal. Neste caso, o stock existente, em contexto determinista, é positivo e será designado por $\boldsymbol{R}$.

Graficamente, tem-se uma evolução como a figura seguinte ilustra:



Não havendo encomenda especial (antecipada), tem-se o custo total no período $\frac{Q_e+R}{D}$

$$CT_a = CQ_e + \frac{Q_a}{2} IC \frac{Q_e}{D} + \frac{R}{2} IC \frac{R}{D} + A \frac{Q_e}{Q_a} = CQ_e + \frac{Q_a Q_e}{2D} IC + \frac{R^2}{2D} IC + A \frac{Q_e}{Q_a} \quad (3.55)$$

No caso de haver encomenda especial antecipada, então a expressão do custo total é dada por

$$CT_e = (C - \Delta C)Q_e + Q_e I(C - C\Delta)\frac{R}{D} + \frac{Q_e}{2} I(C - \Delta C)\frac{Q_e}{D} + \frac{R}{2} IC \frac{R}{D} + A$$

$$CT_e = CQ_e - \Delta C Q_e + \frac{(Q_e+R)^2}{2D} I(C - C\Delta) + \frac{R^2}{2D} I\Delta C + A \quad (3.56)$$

Consequentemente, após simplificações e atendendo a que $\boldsymbol{Q_a^2} = \frac{\boldsymbol{2AD}}{\boldsymbol{IC}}$, a economia média no período $\frac{\boldsymbol{Q_e+R}}{\boldsymbol{D}}$ é então

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{CT_a} - \boldsymbol{CT_e} = \frac{\boldsymbol{Q_a Q_e}}{\boldsymbol{2D}}\boldsymbol{IC} + \boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{Q_e}}{\boldsymbol{Q_a}} + \Delta\boldsymbol{CQ_e} - \frac{(\boldsymbol{Q_e+R})^2}{\boldsymbol{2D}}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}\Delta) + \frac{\boldsymbol{R^2}}{\boldsymbol{2D}}\boldsymbol{I}(\boldsymbol{C} - \Delta\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{A} \quad (3.55)$$

A maximização de (3.56) em ordem a Q_e, e notando que $\boldsymbol{Q_a^2} = \frac{\boldsymbol{2AD}}{\boldsymbol{IC}}$, conduz a

$$\boldsymbol{Q_e^*} = \frac{\Delta\boldsymbol{CD}}{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\Delta)} + \frac{\boldsymbol{CQ_a}}{(\boldsymbol{C}-\Delta\boldsymbol{C})} - \boldsymbol{R} \quad (3.56)$$

sendo a economia conseguida dada por

$$\boldsymbol{E^*} = \boldsymbol{A}\left[\left(\frac{\boldsymbol{Q_e^*}}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{C}-\Delta\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{C}}}\boldsymbol{Q_a}} - \boldsymbol{1}\right)^{\boldsymbol{2}}\right] \quad (3.57)$$

Nota 1. verifica-se que neste caso nem sempre é vantajoso fazer uma encomenda especial antecipada, pois a expressão (3.57) pode ser não positiva, o que indica que não deve haver encomenda especial.

Nota 2. Esta formulação foi efectuada para um prazo de reaprovisionamento nulo. Se tal não acontecer, o valor do stock $\boldsymbol{R}$ deve ser reduzido do montante da procura durante o prazo de reaprovisionamento. Isto é, a quantidade especial vem acrescida da procura durante o prazo de reaprovisionamento, $\boldsymbol{LD}$.

Nota 3. Em relação ao modelo anterior, a encomenda especial vem deduzida do montante existente em stock, o que é lógico à luz do da restrição do prazo de validade do desconto, que termina com a existência de produto em stock, o que pode ser deduzido da representação gráfica.

Exemplo 17. Considere-se que no exemplo anterior o stock existente no limite da data de validade do desconto é 1 500 tons, mantendo-se o resto das condições do problema. Vamos verificar se vale a pena fazer uma encomenda especial antecipada e, em caso afirmativo, qual o seu montante.

Relembremos os dados do problema:

$\boldsymbol{D = 12\,000}$ ***tons;*** $\boldsymbol{C = 110}$ €.; $\boldsymbol{C - C\Delta = 90}$ €.; $\boldsymbol{I = 0,2}$; $\boldsymbol{IC = 0,2 * 110 = 22}$ €; $\boldsymbol{C\Delta = 20}$ €; $\boldsymbol{\mathrm{I}(C - C\Delta) = 0,2 * 90 = 18}$ €;

$\boldsymbol{A = 10\,000}$ €; $\boldsymbol{Q_a = 3\,303\ tons}$; $\boldsymbol{L = \frac{1}{24}\ anos}$

Como $\boldsymbol{L} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{LD} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}} * 12\,000 = 500$ tons, o valor a considerar será $\boldsymbol{R - LD = 1\,500 - 500 = 1\,000}$ tons. Então:

$$\boldsymbol{Q_e^* = \frac{\Delta CD}{I(C - C\Delta)} + \frac{CQ_a}{(C - \Delta C)} - (R - LD) = \frac{20 * 12\,000}{18} + \frac{110 * 3\,303}{90} - 1\,000 \approx 16\,370\ tons}$$

A economia conseguida é:

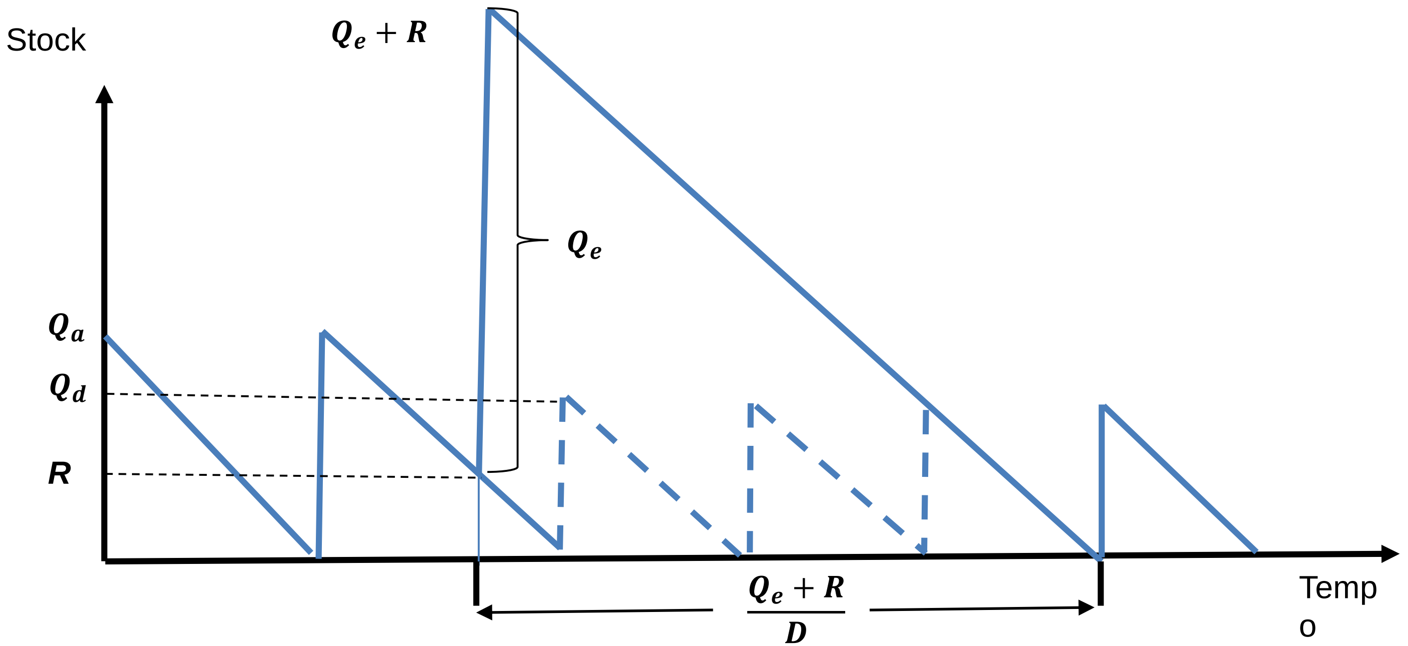
$$\boldsymbol{E^* = A\left[\left(\frac{Q_e^*}{\sqrt{\frac{C - \Delta C}{C} Q_a}} - 1\right)^2\right] = 10\,000 * \left[\left(\frac{16\,370}{\sqrt{\frac{90}{110} * 3\,303}} - 1\right)^2\right] \approx 190\,988\ €}$$

14.3 Encomenda Especial devido a Aumento de Preços

Esta situação é muito semelhante à anterior, em que se analisa a possibilidade de uma encomenda especial, só que não por causa de um desconto pontual, mas devido a um aumento de preços prestes a ocorrer. Mas em ambos os casos, uma encomenda especial é feita antecipadamente para beneficiar de um preço mais baixo. Como o aumento de preços vai ocorrer, a encomenda especial vai depender da quantidade a encomendar, em continuidade, depois desse aumento ocorrer.

Seja então $\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C}$ o novo preço, após o aumento concretizado. Com este novo preço, a quantidade económica da encomenda será $\boldsymbol{Q_d} = \sqrt{\frac{2AD}{I(C+\Delta C)}}$

Graficamente o sistema tem a seguinte evolução



Continuando a designar por $\boldsymbol{CT_a}$ o custo total no período $\frac{Q_e+R}{D}$ não havendo encomenda especial, tendo em conta que as próximas encomendas terão por quantidade económica da encomenda o montante dado por $\boldsymbol{Q_d}$ e por $\boldsymbol{CT_e}$ o custo total no mesmo período com encomenda especial, vem:

$$CT_a = (C+\Delta C)Q_e + \frac{Q_d}{2} I(C+C\Delta)\frac{Q_e}{D} + \frac{R}{2} IC\frac{R}{D} + A\frac{Q_e}{Q_d}$$

ou, após substituir Q_d pela sua expressão no óptimo,

$$CT_a = (C+\Delta C)Q_e + Q_e\sqrt{\frac{2AI(C+\Delta C)}{D}} + IC\frac{R^2}{2D} \qquad (3.58)$$

Quanto ao custo com a encomenda especial antecipada, vem

$$CT_e = CQ_e + Q_e IC\frac{R}{D} + \frac{Q_e}{2} IC\frac{Q_e}{D} + \frac{R}{2} IC\frac{R}{D} + A = CQ_e + ICQ_e\frac{R}{D} + IC\frac{Q_e^2}{2D} + IC\frac{R^2}{2D} + A \qquad (3.59)$$

Então, após algumas simplificações, a economia conseguida com a encomenda especial antecipada é dada por

$$E = CT_a - CT_e = Q_e\left[\Delta C + \sqrt{\frac{2AI(C+\Delta C)}{D}} - IC\frac{R}{D}\right] - IC\frac{Q_e^2}{2D} - A \qquad (3.60)$$

Após optimização em ordem a Q_e , e explicitando em função de Q_d ou de Q_a, vem, respectivamente,

$$Q_e^* = Q_d\left(1+\frac{\Delta C}{C}\right) + \frac{\Delta C}{IC}D - R \quad \text{ou} \quad Q_e^* = Q_a\sqrt{\frac{C+\Delta C}{C}} + \frac{\Delta C}{IC}D - R \qquad (3{,}61)$$

Após algumas manipulações algébricas, o valor da poupança no óptimo, conforme se explicite em função de Q_d e Q_a, respectivamente, é dada por

$$E^* = A\left[\frac{C}{C+\Delta C}\left(\frac{Q_e^*}{Q_d}\right)^2 - 1\right] \quad \text{ou} \quad E^* = A\left[\left(\frac{Q_e^*}{Q_a}\right)^2 - 1\right] \qquad (3.62)$$

Nota. À semelhança do caso anterior, esta formulação foi efectuada para um prazo de reaprovisionamento nulo. Se tal não acontecer, o valor do stock R deve ser reduzido do montante da procura durante o prazo de reaprovisionamento. Isto é, a quantidade da encomenda especial vem acrescida da procura durante o prazo de reaprovisionamento, $\boldsymbol{LD}$.

Exemplo 18. Considere-se que no exemplo anterior o preço vai aumenta para 130€, mantendo-se o resto das condições do problema. Vamos verificar se vale a pena fazer uma encomenda especial antecipada e, em caso afirmativo, qual o seu montante.

Relembremos os dados do problema:

$\boldsymbol{D = 12\,000\ tons;\ C = 110}$ €.; $\boldsymbol{C + C\Delta = 130}$ €.; $\boldsymbol{I = 0,2;\ IC = 0,2 * 110 = 22}$ €; $\boldsymbol{C\Delta = 20}$ €; $\boldsymbol{\mathrm{I}(C + C\Delta) = 0,2 * 130 = 26}$ €;

$\boldsymbol{A = 10\,000}$ €; $\boldsymbol{Q_a = 3\,03\ tons;\ Q_d = 3\,038\ tons;\ L = \frac{1}{24}\ anos}$

Como $\boldsymbol{L > 0,\ LD} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}} * 12\,000 = 500$ tons, o valor a considerar será $\boldsymbol{R - LD = 1\,500 - 500 = 1\,000}$ tons. Então:

$$\boldsymbol{Q_e^* = Q_d\left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right) + \frac{\Delta C}{IC}D - (R - LD) = 3\,038 * \left(1 + \frac{20}{110}\right) + \frac{20}{22} * 12\,000 - 1\,000 \approx 13\,500\ tons}$$

ou

$$\boldsymbol{Q_e^* = Q_a\sqrt{\frac{C+\Delta C}{C}} + \frac{\Delta C}{IC}D - R = 3\,303 * \sqrt{\frac{110+20}{110}} + \frac{20}{22} * 12\,000 - 1\,000 \approx 13\,500\ tons}$$

A economia conseguida é:

$$\boldsymbol{E^* = A\left[\frac{C}{C + \Delta C}\left(\frac{Q_e^*}{Q_d}\right)^2 - 1\right] = 12\,000 * \left[\frac{110}{130} * \left(\frac{13\,500}{3\,038}\right)^2 - 1\right] \approx 188\,466€}$$

$$\boldsymbol{E^* = A\left[\left(\frac{Q_e^*}{Q_a}\right)^2 - 1\right] = 12\,000 * \left[\left(\frac{13\,500}{3\,303}\right)^2 - 1\right] \approx 188\,466€}$$

15. Bibliografia

- AXATER, Seven, *Inventory Control*, Springer, 2006
- ARROW, K. J., S. Karlin, and H. Scarf, *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Stanford, Cal.; Stanford University Press, 1958
- G. HADLEY, G. and T.M. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice- Hall, 1963
- HILLIER, F.S. and G.J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, 9th ed., McGraw-Hill, New York., 2010
- MAGEE, J. F., *Production Planning and Inventory Control*, McGraw-Hill, 1958
- STARR, Martin Kenneth and David Wendell Miller, *Inventory Control: Theory and Practice,* Prentice- Hall, 1962
- TERSIN, Richard, *Principles of Inventory and Materials Management*, North-Holland, 1988
- TAHA, H. A*., Operations Research: An Introduction*, 9th ed. , Prentice-Hall, 2011
- WAYNE L. Winston, *Operations Research: Applications and Algorithms*, 4th ed., Thomson Brooks/Cole, USA., 2012
- ZIPKIN, Paul H., *Foundations of Inventory Management*, Boston: McGraw Hill, 2000